Correction DS 02

2nd degré

Durée de l'épreuve : **1h55 minutes**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 8$

1. Déterminer les racines de f.

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4 + 32 = 36 = 6^2 > 0$

On a donc deux racines disctinctes : $x_1 = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

2. Déterminer la forme canonique de f et établir son tableau de variations.

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = 1 - 2 - 8 = -9$

On obtient donc la forme canonique : $f(x) = (x-1)^2 - 9$

Et, vu que $a = 1 > 0$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

3. Factoriser f et établir son tableau de signes.

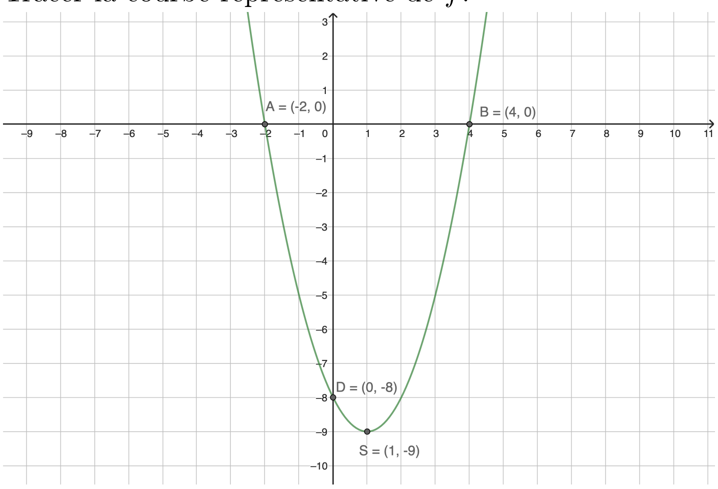
On a déjà déterminé les racines de f et $a = 1$ d'où :

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$= (x+2)(x-4)$

Et comme $a = 1 > 0$ le tableau de signes de f est :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Tracer la courbe représentative de f.



5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

Soit $X = x^2$. On a donc $X \geq 0$.

$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - 2X - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = \dfrac{2+6}{2} = -2$ ou $X_2 = 4$

Or $X = x^2$ est forcément positif donc X_1 est impossible et donc :

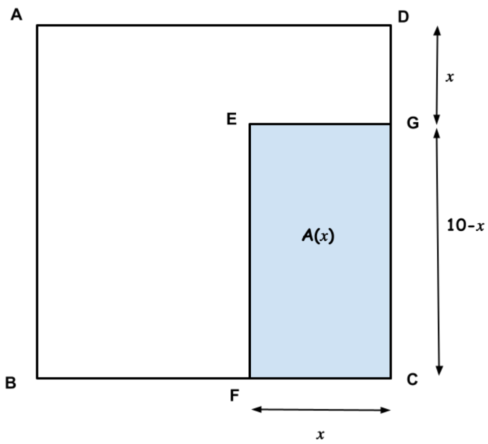
$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ ou $x = -2$

Et donc $S = \{-2; 2\}$

Exercice 2 (5 points)

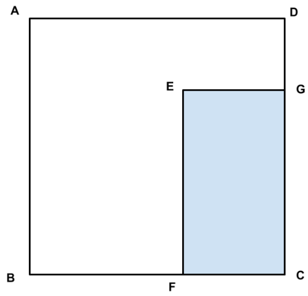
Soit un carré $ABCD$ de côté de longueur 10 mètres.
Soit un rectangle $EFCG$ tel que $EG = DG = x$.
Soit $\mathcal{A}(x)$ la fonction représentant l' aire du rectangle $EFCG$.

1. Montrer que $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 10x$.



$\mathcal{A}(x) = x(10-x) = -x^2 + 10x$ avec $x \in]0;10[$

2. Déterminer les dimensions de $EFCG$ pour que son aire soit supérieure ou égal à 9 m^2.



$\mathcal{A}(x) \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 10x \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 10x - 9 \geq 0$

$\Delta = 100 - 36 = 84 = 8^2 > 0$

Et donc les racines de $-x^2 + 10x - 9$ sont :
$x_1 = \dfrac{-10-8}{-2} = 9$ et $x_2 = \dfrac{-10+8}{-2} = 1$

Vu que $a = -1 < 0$, le tableau de signes de $-x^2 + 10x - 9$ est :

x	0		1		9		10
$-x^2+10x-9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Et donc $S = [1;9]$

Pour que l'aire de $EFCG$ soit supérieure ou égale à 9 m^2, il faut que la longueur FC soit comprise entre 1 et 9 mètres, la longueur EF valant 10-FC.

3. Déterminer les dimensions de $EFCG$ pour que son aire soit comprise entre 9 m^2 et 21 m^2.

$9 \geq \mathcal{A}(x) \leq 21 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \leq -x^2 + 10x \leq 21$

$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 10x - 9 \geq 0$ et $-x^2 + 10x - 21 \leq 0$

La 1ère inéquation est déjà résolue, on résoud de manière similaire la deuxième :

x	0		3		7		10
$-x^2+10x-21$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Au final, on prend l'intersection des solutions des deux inéquations, d'où : $x = EF \in [1;3] \cup [7;9]$

Exercice 3 (5 points)

Soit m un nombre réel.
Soit l'équation : $mx^2 + 2x + m + 1 = 0 \qquad (E)$

Déterminer le nombre de solutions de cette équation en fonction des valeurs prises par le paramètre m.

Le nombre de solutions de (E) dépend du signe du dicriminant de $mx^2 + 2x + m + 1$:

$$\begin{aligned}\Delta(m) &= 2^2 - 4m(m+1) = 4 - 4m^2 - 4m \\ &= 4(-m^2 - m + 1)\end{aligned}$$

Etudions maintenant le signe de Δ qui est le même que celui de $-m^2 - m + 1$:

$\Delta' = 1 + 4 = 5 > 0$

$m_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) > 0$ et $m_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} = -\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) < 0$

Ce qui donne, vu que $a = -1 < 0$, le tableau de signes :

x	$-\infty$		m_2		m_1		$+\infty$
$\Delta(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

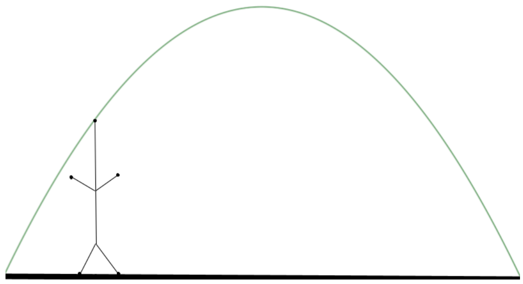
Et donc pour conclure :

- si $m = m_1$ ou $m = m_2$ alors $\Delta(m) = 0$ et (E) a une solution double ;
- si $m \in]m_1 ; m_2[$ alors $\Delta(m) > 0$ et (E) a deux solutions disctinctes ;
- si $m \in]-\infty ; m_1[\cup]m_2 ; +\infty[$ alors $\Delta(m) < 0$ et (E) n'a aucune solution.

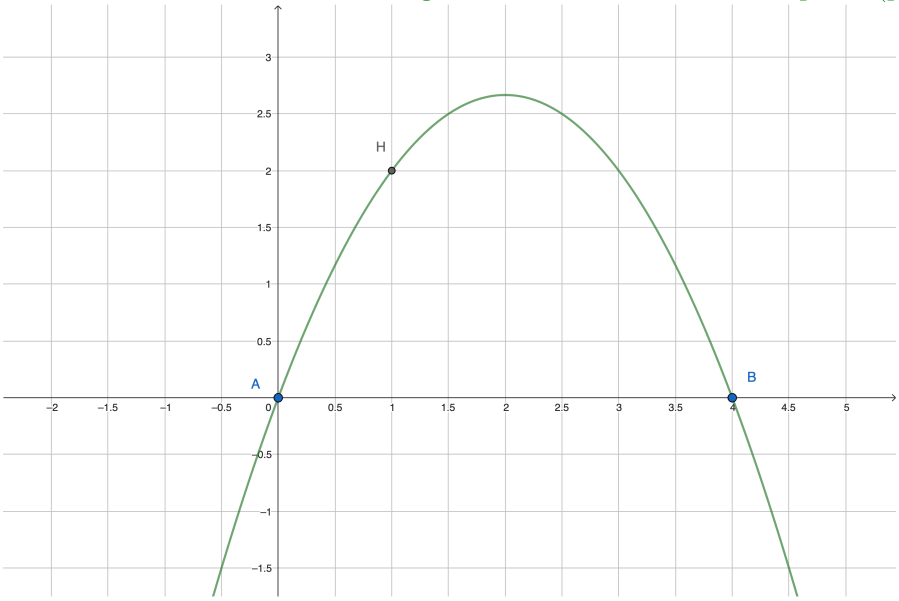
Exercice 4 (5 points)

Déterminer la hauteur d'une porte sachant que :

- la porte a une forme parabolique ;
- la distance au sol entre les deux extrémités de la porte est de 4 mètres ;
- une personne mesurant 2 mètres, placée à 1 mètre d'une extrémité de la porte, touche le haut de la porte.



Soit un repère orthonormé d'unité 1 mètre dont l'origine est l'extrémité gauche de la porte (point A) et dont l'axe des abcisses est dirigé vers extrémité droite de la porte (point B) :



Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ la fonction du second degré dont la porte est une partie et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

$A(0;0) \in \mathscr{C}_f \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$
Donc $f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$

$$H(1;2) \in \mathscr{C}_f \text{ et } B(4;0) \in \mathscr{C}_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(4) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2 - a \\ 4a + 2 - a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2 - \left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ a = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = \dfrac{8}{3} \\ a = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{2}{3}x(x - 4)$$

Pour conclure, la hauteur de la porte correspond à l'ordonnée du sommet de la parabole (β).
Or $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2$ et donc la hauteur vaut : $\beta = f(2) = \dfrac{4}{3}$

Exercice bonus (optionnel) : Factoriser $x^3 - 1$

