Correction DS03

Suites

Durée de l'épreuve : **01h55**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 - n$

a. Calculer ses 3 premiers termes. $u_0 = 2 - 0 = 2 \quad u_1 = 2 - 1 = 1 \quad u_2 = 2 - 2 = 0$

b. Déterminer si elle est géométrique, arithmétique ou ni l'un ni l'autre.

$u_{n+1} - u_n = (2 - (n+1)) - (2 - n) = 2 - n - 1 - 2 + n = -1$

$u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme $u_0 = 2$.

c. Donner sa définition par récurrence.

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme $u_0 = 2$ donc elle est définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d. Déterminer son sens de variation.

$u_{n+1} - u_n = -1 < 0 \;\Rightarrow\; (u_n)$ strictement décroissante

e. Déterminer la somme de ses n premiers termes.

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n \cdot \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} = n \cdot \frac{u_0 + (u_0 - (n-1)}{2} = n \cdot \frac{2u_0 - n + 1}{2}$$

$$= n \cdot \frac{2 \times 2 - n + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (5 - n)$$

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = n + v_n + 1 \quad \text{pour tout en tier naturel } n \end{cases}$$

a. Calculer la valeur des 3 premiers termes.

$v_0 = -5 \quad v_1 = v_{0+1} = 0 - 5 + 1 = -4 \quad v_2 = v_{1+1} = 1 - 4 + 1 = -2$

b. Déterminer si elle est géométrique, arithmétique ou ni l'un ni l'autre.

$v_{n+1} - v_n = n + 1$ donc dépend de n donc (v_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{5}$ et $\frac{u_2}{u_1} = 0$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (v_n) n'est pas géométrique.

Donc (v_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

c. Déterminer son sens de variation.

$$\left.\begin{array}{r} v_{n+1} - v_n = n + 1 \\ n \geq 0 \;\Rightarrow\; n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_{n+1} - v_n > 0 \Longrightarrow (v_n) \text{ strictement croissante}$$

Exercice 2 (5 points)

Au départ, Oscar n'était pas là et il n'y avait pas de minions.
Ensuite, Oscar est venu et depuis, chaque jour il y a le double du nombre de minions du jour précédent plus 10 nouveaux minions.

1. Soit (u_n) la suite représentant le nombre de minions le jour n.

a. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

$u_0 = 0 \quad u_1 = 10 + 2u_0 = 10 \quad u_2 = 10 + 2u_1 = 30 \quad u_3 = 10 + 2u_2 = 70$

b. Donner une formulation par récurrence de la suite (u_n).

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 10 + 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $a_n = u_n + 10$

a. Démonter que la suite (a_n) est une suite géométrique de 1er terme 10 et de raison 2.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + 10 \\ &= (10 + 2u_n) + 10 \\ &= 2u_n + 20 \\ &= 2(u_n + 10) \\ &= 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc (a_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $a_0 = u_0 + 10 = 10$

b. Déterminer une formulation explicite de la suite (a_n).

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = 2v_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow v_n = 10 \times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. En déduire le nombre de minions au bout d'une année.

$a_n = u_n + 10 \ \Rightarrow \ u_n = a_n - 10 \ \Rightarrow \ u_n = 10 \times 2^n - 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \ u_{365} = 10 \times 2^{365} - 10 \simeq 10 \times 2^{365} \simeq 10 \times 10^{110} = 10^{111} = 100$ milliards de gogols ...

Question Bonus : On a maintenant, chaque jour, a minions additionnels plus b fois le nombre de minions du jour précédent. Déterminer le nombre de minions au bout d'une année.

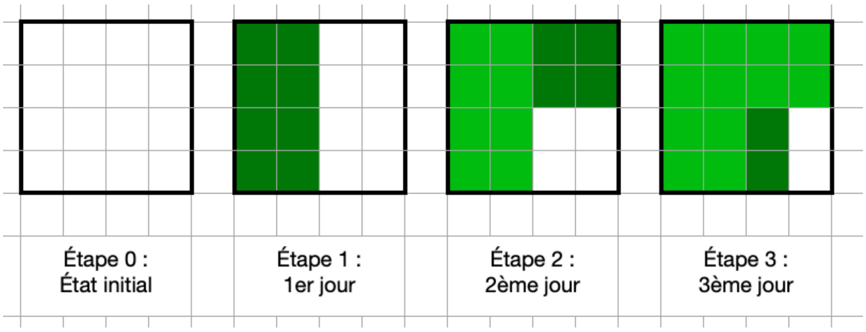
Exercice 3 (5 points)

Soit une feuille carrée de coté de longueur a.

La feuille est complètement blanche initialement ; puis, chaque jour, on colorie la moitié de la surface blanche restante.

Soit la suite numérique (b_n) modélisant la surface blanche le jour n et la suite (c_n) modélisant la surface coloriée

1. Représenter les différents états de la feuille depuis la situation initiale jusqu'au 3ème jour.



2. Calculer les 4 premiers termes des suites (b_n) et (c_n).

$b_0 = a^2 \qquad b_1 = \frac{1}{2}a^2 \qquad b_2 = \frac{1}{4}a^2 \qquad b_3 = \frac{1}{8}a^2$

$c_0 = 0 \qquad c_1 = \frac{1}{2}a^2 \qquad c_2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \qquad c_3 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2$

$c_1 = 1 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \qquad c_2 = 1 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \qquad c_3 = 1 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2$

3. Donner une formulation par récurrence des suites (b_n) et (c_n).

A chaque étape, la surface blanche est la moitié de la surface blanche de l'étape précédente donc la suite (b_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} b_0 = a^2 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A chaque étape, la surface coloriée est la surface coloriée à l'étape précédente plus la moitié de la surface blanche de l'étape précédente donc la suite (c_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} c_0 = a^2 \\ c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4. Déterminer une formulation explicite des suites (b_n) et (c_n).

(b_n) est une suite géométrique de 1er terme $b_0 = a^2$ et de raison $\frac{1}{2}$ donc :

$$b_n = a^2\frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La surface coloriée est la surface totale moins la surface blanche donc :

$$c_n = a^2 - b_n = a^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou encore, la surface coloriée est la somme des surfaces des rectangles additionnels coloriées depuis l'étape 1 jusqu'à l'étape n (chacun d'eux ayant la même surface que la surface blanche à l'étape correspondante) :

$$c_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i = b_1\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a^2 \times 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = a^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 4 (5 points)

On propose trois formules pour creuser un puits :

- Formule A : 5000 Dh dès le départ plus 1000 Dh par mètre creusé.
- Formule B : le premier mètre creusé coûte 800 Dh et chaque mètre creusé supplémentaire coûte 100 Dh de plus que le précédent.
- Formule C : le premier mètre creusé coûte 500 Dh et chaque mètre creusé supplémentaire coûte 10% de plus que le précédent.

Soit les suites (a_n), (b_n) et (c_n) modélisant le coût d'un puits de n mètres pour la formule A, la formule B et la formule C respectivement.

Pour chaque formule :

1. Calculer le coût d'un puits de 1 mètre, 2 mètres et 3 mètres.

a. $a_0 = 5000 \quad a_1 = a_0 + 1000 = 6000 \quad a_2 = a_1 + 1000 = 7000 \quad a_3 = a_2 + 1000 = 8000$

b. $b_0 = 0 \quad b_1 = b_0 + 800 = 800 \quad b_2 = b_1 + (800+100) = 1700 \quad b_3 = b_2 + (800 + 2\times 100) = 2700$

c. $c_0 = 0 \quad c_1 = c_0 + 500 = 500 \quad b_2 = b_1 + (500 \times 1,1) = 1050 \quad b_3 = b_2 + (500 \times 1,1^2) = 1655$

2. Donner une formulation par récurrence de la suite associée au coût d'un puits de n mètres.

a. $a_0 = 5000$ et $a_{n+1} = a_n + 1000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b. $b_1 = 800$ et $b_{n+1} = b_n + u_n + 100 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ avec la suite (u_n) représentant le prix du mètre à la profondeur n et définie par : $u_1 = 800$ et $u_{n+1} = u_n + 100 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c. $c_1 = 500$ et $c_{n+1} = c_n + 1,1\, v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ avec la suite (v_n) représentant le prix du mètre à la profondeur n et définie par : $v_1 = 500$ et $v_{n+1} = 1,1\, v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Déterminer une formulation explicite de la suite associée au coût d'un puits de n mètres.

a. (a_n) est une suite arithmétique de 1er terme $a_0 = 5000$ et de raison 1000 donc :
$a_n = 5000 + 1000n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b. (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_1 = 800$ et de raison 100 donc :
$u_n = 800 + 100(n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2} = n\big(800 + 50(n-1)\big) = 50n^2 + 750n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

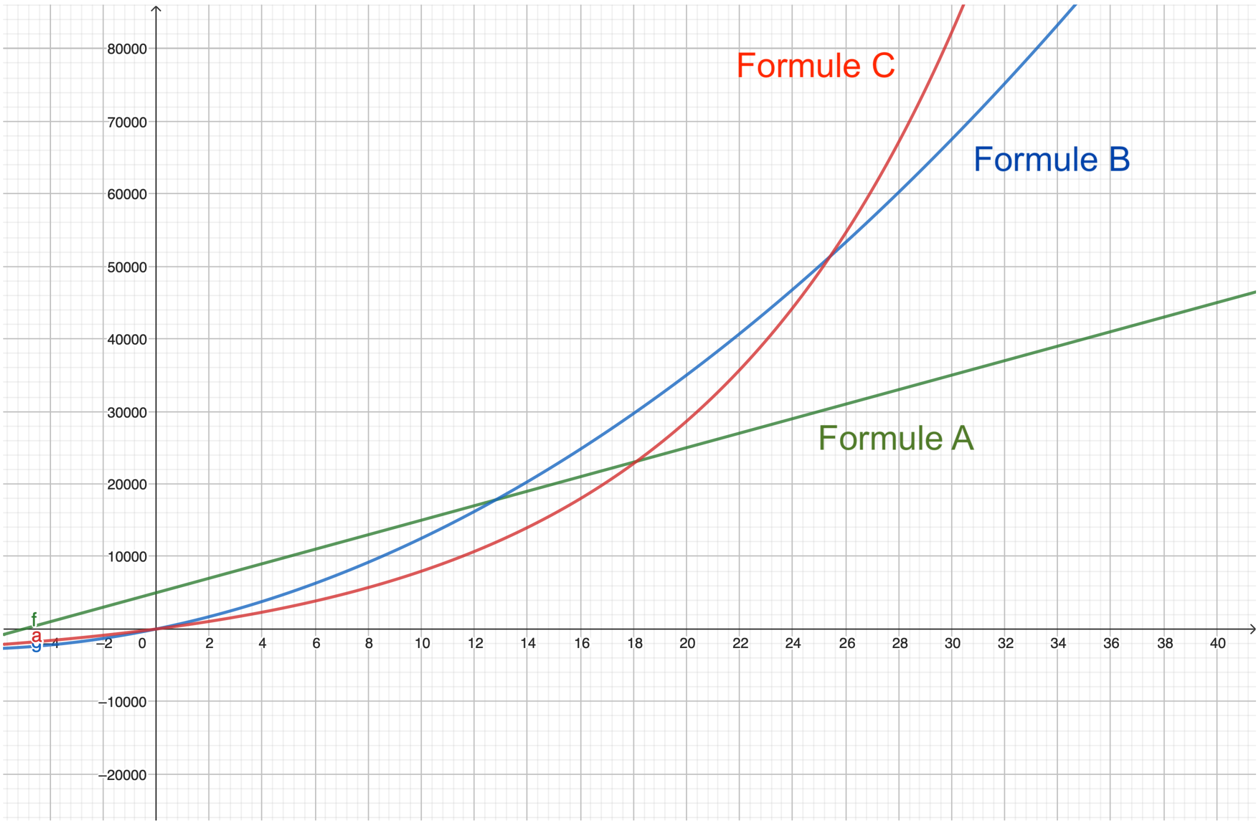
c. $v_n =$ est une suite géométrique de 1er terme $v_1 = 500$ et de raison 1,1 donc :
$v_n = 500 \times 1,1^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \frac{1 - 1,1^n}{1 - 1,1} = 5000(1,1^n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

4. Comparer son avantage par rapport aux autres formules.
La suite (a_n) est arithmétique donc linéaire (en n), la suite (b_n) est quadratique (en n^2) et la suite (c_n) est quasi-géométrique (en $1,1^n$).
On peut conjecturer que :
- même si au départ (à 0 mètre) la formule A est plus chère, à partir d'une certaine profondeur, elle sera moins chère que les autres
- même si la formule C est moins chère que la formule B pour les premiers mètres, à partir d'une certaine profondeur, elle deviendra plus chère du fait de sa croissante exponentielle.

$a_n < b_n \;\Leftrightarrow\; 50n^2 - 250n - 5000 > 0 \;\Leftrightarrow\; n^2 - 5n - 100 > 0 \;\big(\;\Leftrightarrow\; n \geq 13\big)$

$c_n > b_n \;\Leftrightarrow\; 100(1,1^n - 1) - n^2 - 15n > 0 \;\Leftrightarrow\; 100 \times 1,1^n - n^2 - 15n - 100 > 0 \;\big(\;\Leftrightarrow\; n \geq 26\big)$



- *Je suis trop fort en Maths*
- Prouve le !
- *Donne moi un calcul*
- 746×607 ?
- *ça fait 42 552*
- mais c'est faux !
- *oui, mais c'était rapide !*