

DS03Suites
ProbabilitéDurée de l'épreuve : **1h55***L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.**Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.***EXERCICE 1****10 points**

Le professeur X utilise un algorithme pour essayer de détecter si un devoir maison a été réalisé avec une intelligence artificielle.

On considère les évènements :

- **T** : « l'élève a Triché, c'est à dire qu'il a réalisé son devoir avec une intelligence artificielle » ;
- **P** : « le test est Positif, c'est à dire que l'algorithme estime que le devoir a été réalisé par une intelligence artificielle ».

Par ailleurs on sait que :

- pour les élèves qui ont triché, le test est positif à 90% (vrais positifs) ;
- pour les élèves qui n'ont pas triché, le test est tout de même positif dans 1% des cas (faux positifs).

Partie A**5 points**

On suppose dans cette partie que 10% des élèves ont triché.

1. Traduire en termes de probabilités les informations chiffrées de l'énoncé. 1 pt
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité. 1 pt
3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est de 9,9%. 1,5 pt
4. Malak, avec un sourire malicieux, dit : « si le test est positif, il est plus probable que l'algorithme se trompe ».
Qu'en pensez-vous? Justifier par des calculs. 1,5 pt

Partie B**5 points**

Dans cette partie, on note p la proportion des élèves qui ont triché.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité complet. 1 pt
2. Déterminer la probabilité d'un faux positif en fonction de p . 1 pt
3. Montrer que la probabilité que le test soit négatif est égale à $0,99 - 0,89p$. 1,5 pt
4. Yasmine, d'un ton allègre, dit : « l'efficacité de l'algorithme dépend de la proportion d'élèves qui trichent ».
Déterminer les valeurs de p pour lesquelles, si le test est positif, il est plus probable que l'élève n'ait pas triché. 1,5 pt

Question bonus : on renforce la vérification en considérant qu'un devoir est vraiment frauduleux lorsque, sur 5 tests successifs, au moins 4 sont positifs.

Déterminer alors la probabilité d'un faux positif.

EXERCICE 2**10 points**

Youssef se déplace sur une ligne droite en plusieurs étapes.

Il se déplace toujours dans le même sens.

On modélise :

- la distance parcourue par Youssef à chaque étape par une suite (d_n) , le terme d_n représente donc la distance parcourue à l'étape n ;
- la distance **totale** parcourue par Youssef à chaque étape par une suite (S_n) , le terme S_n représente donc la distance parcourue depuis la première étape jusqu'à l'étape n .

Partie A**3 points**

On suppose dans cette partie que Youssef parcourt 10 mètres lors de la première étape ; puis, à chaque étape, il parcourt 1 mètre de plus que la distance parcourue lors de l'étape précédente.

1. a. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (d_n) . 0,5 pt
- b. Préciser le type de la suite (d_n) et donner sa définition par récurrence. 0,5 pt
- c. En déduire la définition explicite de la suite (d_n) . 0,5 pt
2. a. Calculer la valeur du 4ème terme de la suite (S_n) 0,5 pt
- b. Exprimer S_n en fonction de termes de la suite (d_n) . 0,5 pt
- c. En déduire la définition explicite de la suite (S_n) . 0,5 pt

Partie B**3 points**

On suppose dans cette partie que Youssef parcourt 8 mètres lors de la première étape ; puis, à chaque étape, il parcourt la moitié de la distance parcourue lors de l'étape précédente.

1. a. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (d_n) . 0,25 pt
- b. Préciser le type de la suite (d_n) et donner sa définition par récurrence. 0,5 pt
- c. En déduire la définition explicite de la suite (d_n) . 0,5 pt
2. a. Calculer la valeur du 4ème terme de la suite (S_n) . 0,25 pt
- b. Exprimer S_n en fonction de termes de la suite (d_n) . 0,5 pt
- c. En déduire la définition explicite de la suite (S_n) . 0,5 pt
- d. Conjecturer sur la limite de la suite (S_n) . 0,5 pt

Partie C**4 points**

On suppose dans cette partie que Youssef parcourt 10 mètres lors de la première étape ; puis, à chaque étape, il parcourt un mètre plus la moitié de la distance parcourue lors de l'étape précédente.

1. a. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (d_n) . 0,5 pt
- b. Donner la définition par récurrence de la suite (d_n) . 0,5 pt
- c. La suite (d_n) est-elle géométrique ? arithmétique ? Justifier. 0,5 pt
2. On considère la suite (a_n) définie par $a_n = d_n - 2$.
 - a. Démontrer que la suite (a_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{2}$. 1 pt
 - b. En déduire la définition explicite de la suite (a_n) . 0,5 pt
3. a. En déduire la définition explicite de la suite (d_n) . 0,5 pt
- b. Conjecturer sur la limite de la suite (d_n) . 0,5 pt

Exercice bonus (optionnel) : déterminer une suite auxiliaire géométrique permettant d'étudier la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux nombres réels.