Correction DS03

Suites
Probabilité

Durée de l'épreuve : **1h55**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 — 10 points

Le professeur X utilise un algorithme pour essayer de détecter si un devoir maison a été réalisé avec une intelligence artificielle.

On considère les évènements :
- **T** : « l'élève a Triché, c'est à dire qu'il a réalisé son devoir avec une intelligence artificielle » ;
- **P** : « le test est Positif, c'est à dire que l'algorithme estime que le devoir a été réalisé par une intelligence artificielle ».

Par ailleurs on sait que :
- pour les élèves qui ont triché, le test est positif à 90% (vrais positifs) ;
- pour les élèves qui n'ont pas triché, le test est tout de même positif dans 1% des cas (faux positifs).

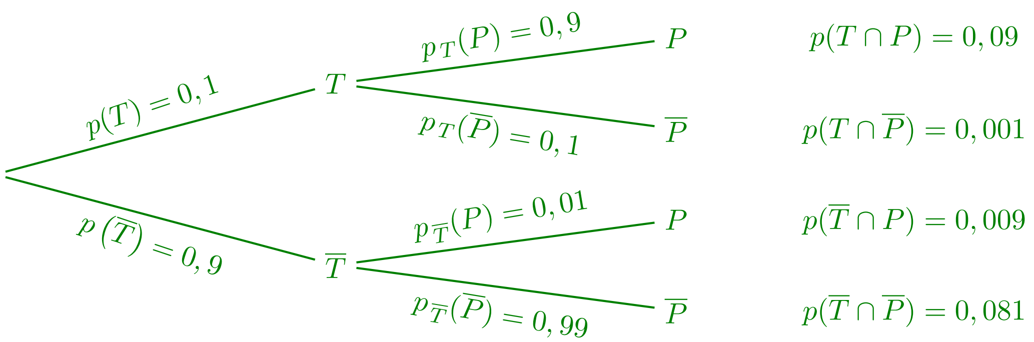
Partie A — 5 points

On suppose dans cette partie que 10% des élèves ont triché.

1. Traduire en termes de probabilités les informations chiffrées de l'énoncé. 1 pt

$p(T) = 0,1 \quad ; \quad p_T(P) = 0,9 \quad ; \quad p_{\overline{T}}(P) = 0,01 \quad ;$

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité. 1 pt



3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est de 9,9%. 1,5 pt

T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(P) &= p(T \cap P) + p(\overline{T} \cap P) \\ &= p(T) \times p_T(P) + p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(P)) \\ &= 0,1 \times 0,9 + (1 - 0,1) \times 0,01 \\ &= 0,09 + 0,009 \\ &= 0,099 \\ &= 9,9\% \end{aligned}$$

4. Malak, avec un sourire malicieux, dit : « si le test est positif, il est plus probable que l'algorithme se trompe ».

Qu'en pensez-vous ? Justifier par des calculs. 1,5 pt

On compare les deux probabilités conditionnelles :

$$\left.\begin{aligned} p_P(T) &= \frac{p(T\cap P)}{p(P)} \\ p_P(\overline{T}) &= \frac{p(\overline{T}\cap P)}{p(P)} \end{aligned}\right\} \implies \frac{p_P(T)}{p_P(\overline{T})} = \frac{p(T\cap P)}{p(\overline{T}\cap P)} = \frac{0,090}{0,009} = 10$$

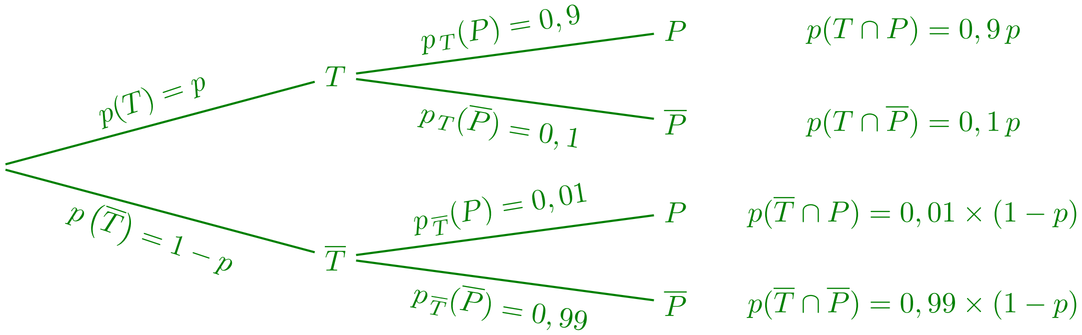
Donc, si le test est positif, il est dix fois plus probable que l'èleve est triché, Malak nous a tendu un piège par son affirmation ...

Toutefois, si le test est positif, il se trompe dans environ 9% des cas, c'est pourquoi le professeur X ne note pas les devoirs maisons ...

Partie B **5 points**

Dans cette partie, on note p la proportion des élèves qui ont triché.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité complet. 1 pt



2. Déterminer la probabilité d'un faux positif en fonction de p. 1 pt

$$\begin{aligned} p(\overline{T} \cap P) &= p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(P) \\ &= 0,01 \times (1-p) \end{aligned}$$

3. Montrer que la probabilité que le test soit négatif est égale à $0,99 - 0,89p$. 1,5 pt

T et $\overline{T}$ formenent une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\overline{P}) &= p(T \cap \overline{P}) + p(\overline{T} \cap \overline{P}) \\ &= p(T) \times p_T(\overline{P}) + p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(\overline{P})) \\ &= 0,1\,p + 0,99 \times (1-p) \\ &= 0,10\,p + 0,99 - 0,99p \\ &= 0,99 - 0,89\,p \end{aligned}$$

4. Yasmine, d'un ton allègre, dit : « l'efficacité de l'algorithme dépend de la proportion d'élèves qui trichent ».

Déterminer les valeurs de p pour lequelles, si le test est positif, il est plus probable que l'élève n'ait pas triché. 1,5 pt

On cherche à résoudre l'inéquation : $p_P(\overline{T}) > p_P(T)$

$$p_P(\overline{T}) > p_P(T) \iff \frac{p(P \cap \overline{T})}{p(P)} > \frac{p(P \cap T)}{p(P)} \iff p(P \cap \overline{T}) > p(P \cap T)$$

$$\iff p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(P) > p(T) \times p_T(P) \iff 0,01 \times (1-p) > 0,9\,p$$

$$\iff 91\,p < 1 \iff p < \frac{1}{91}$$

Donc si $p \in \left[0; \frac{1}{91}\right[$, il est plus probable que, si le test est positif, l'élève n'ait pas triché.

Question bonus : on renforce la vérification en considérant qu'un devoir est vraiment frauduleux lorsque, sur sur 5 tests successifs, au moins 4 sont positifs.
Déterminer alors la probabilité d'un faux positif.

Exercice 2 — 10 points

Youssef se déplace sur une ligne droite en plusieurs étapes.
Il se déplace toujours dans le même sens.

On modélise :

- la distance parcourue par Youssef à chaque étape par une suite (d_n), le terme d_n représente donc la distance parcourue à l'étape n ;
- la distance **totale** parcourue par Youssef à chaque étape par une suite (S_n), le terme S_n représente donc la distance parcourue depuis la première étape jusqu'à l'étape n.

Partie A — 3 points

On suppose dans cette partie que Youssef parcourt 10 mètres lors de la première étape ; puis, à chaque étape, il parcourt 1 mètre de plus que la distance parcourue lors de l'étape précédente.

1. a. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (d_n). 0,5 pt

$d_0 = 10 \quad d_1 = 10 + 1 = 11 \quad d_2 = 11 + 1 = 12 \quad d_3 = 12 + 1 = 13$

(ou bien $d_1 = 10 \quad \cdots \quad u4 = 13$)

b. Préciser le type de la suite (d_n) et donner sa définition par récurrence. 0,5 pt

(d_n) est une suite arithmétique de 1er terme $d_0 = 10$ et de raison $r = 1$:

$$\begin{cases} d_0 = 10 \\ d_{n+1} = d_n + 1 \qquad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

c. En déduire la définition explicite de la suite (d_n). 0,5 pt

$d_n = 10 + n$ pour tout entier naturel n

(ou avec $d_1 = 10$, $d_n = 10 + (n-1) = 9 + n$ pour tout entier naturel non nul n)

2. a. Calculer la valeur du 4ème terme de la suite (S_n) 0,5 pt

$S_3 = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 46$

b. Exprimer S_n en fonction de termes de la suite (d_n). 0,5 pt

$S_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ pour tout entier natrurel n

c. En déduire la définition explicite de la suite (S_n). 0,5 pt

$$S_n = (n+1) \times \frac{d_0 + d_n}{2} = (n+1) \times \frac{10 + 10 + n}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+20) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\text{ou avec } d_1 = 10,\ S_n = \frac{n(n+19)}{2} \qquad \text{pour tout entier naturel non nul } n \right)$$

Partie B **3 points**

On suppose dans cette partie que Youssef parcourt 8 mètres lors de la première étape ; puis, à chaque étape, il parcourt la moitié de la distance parcourue lors de l'étape précédente.

1. a. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (d_n). 0,25 pt

$d_0 = 8 \quad d_1 = \frac{8}{2} = 4 \quad d_2 = \frac{4}{2} = 2 \quad d_3 = \frac{2}{2} = 1$

b. Préciser le type de la suite (d_n) et donner sa définition par récurrence. 0,5 pt

(d_n) est une suite géométrique de 1er terme $d_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} d_0 = 10 \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}\,d_n \qquad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

c. En déduire la définition explicite de la suite (d_n). 0,5 pt

(d_n) est une suite géométrique de 1er terme $d_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ donc :

$d_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n

2. a. Calculer la valeur du 4ème terme de la suite (S_n). 0,25 pt

$S_3 = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 15$

b. Exprimer S_n en fonction de termes de la suite (d_n). 0,5 pt

$S_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$

c. En déduire la définition explicite de la suite (S_n). 0,5 pt

$$S_n = d_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

d. Conjecturer sur la limite de la suite (S_n). 0,5 pt

$-1 < \frac{1}{2} < -1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ tend vers 0.

Donc $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ tend vers 1 et donc S_n tend vers 16.

Partie C **4 points**

On suppose dans cette partie que Youssef parcourt 10 mètres lors de la première étape ; puis, à chaque étape, il parcourt un mètre plus la moitié de la distance parcourue lors de l'étape précédente.

1. **a.** Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (d_n). 0,5 pt

$d_0 = 10 \quad d_1 = 1 + \dfrac{10}{2} = 6 \quad d_2 = 1 + \dfrac{6}{2} = 4 \quad d_3 = 1 + \dfrac{4}{2} = 3$

b. Donner la défnition par récurrence de la suite (d_n). 0,5 pt

$$\begin{cases} d_0 = 10 \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, d_n + 1 \qquad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

c. La suite (d_n) est-elle géométrique ? arithmétique ? Justifier. 0,5 pt

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d_1}{d_0} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \implies \dfrac{d_2}{d_1} \neq \dfrac{d_1}{d_0} \implies (d_n) \text{ n'est pas une suite géométrique.}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 - d_0 = -4 \\ d_2 - d_1 = -2 \end{array}\right\} \implies d_2 - d_1 \neq d_1 - d_0 \implies (d_n) \text{ n'est pas une suite arithmétique.}$$

2. On considère la suite (a_n) définie par $a_n = d_n - 2$.

a. Démonter que la suite (a_n) est une géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. 1 pt

$$a_n = d_n - 2 \implies \left.\begin{array}{r} a_{n+1} = d_{n+1} - 2 \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, d_n + 1 \end{array}\right\} \implies a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, d_n + 1 - 2$$

$$\implies a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, d_n - 1 \implies \left.\begin{array}{r} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(d_n - 2) \\ a_n = d_n - 2 \end{array}\right\} \implies a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, a_n$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $a = \dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $a_0 = d_0 - 2 = 8$

b. En déduire la définition explicite de la suite (a_n). 0,5 pt

$a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier nature n

3. **a.** En déduire la définition explicite de la suite (d_n). 0,5 pt

$d_n = a_n + 2 = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$ pour tout entier nature n

b. Conjecturer sur la limite de la suite (d_n). 0,5 pt

$-1 < \dfrac{1}{2} < -1$ donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0.

Donc $8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 et donc d_n tend vers 2.

Exercice bonus (optionnel) : déterminer une suite auxiliaire géométrique permettant d'étudier la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux nombres réels.

