Correction DS 02

Suites numériques

Durée de l'épreuve : **1h55 minutes**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Déterminer la valeur des 4 premiers termes de la suite.
$u_0 = 2 \qquad u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6 \qquad u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18 \qquad u_3 = u_2 \times q = 18 \times 3 = 54$

2. Donner la définition de la suite par une formule de récurrence.
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3\,u_n \qquad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

3. En déduire la définiton de la suite par une formule explicite.
$u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 3^n \qquad$ pour tout entier naturel n

4. Déterminer la variation de la suite.
$u_n > 0 \quad \forall n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q = 3 > 1 \quad \forall n$ donc $u_{n+1} > u_n \forall n$ donc (u_n) est strictement croissante.

5. Déterminer la limite de la suite.
(3^n) a pour limite $+\infty$ car de la forme (q^n) avec $q > 1$.
2 étant strictement positif, (2×3^n) a également pour limite $+\infty$.

6. Calculer la somme des n premiers termes.
$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \times \dfrac{1 - 3^n}{1 - 3} = 3^n - 1$

Exercice 2 (7 points)

Au début de l'année, Réda avait 100 milliards de neurones.
A la fin de chaque mois :

- comme il s'engage activement dans ses apprentissages, il augmente son nombre de neurones de 10% par rapport à celui qu'il avait en début de mois ;
- mais juste après, comme il passe une nuit blanche à jouer sur la playstation, il perd 5 milliards de neurones.

On considère la suite (u_n), le terme u_n représentant le nombre de neurones en milliards à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois.

1. **a.** Donner la valeur de u_0, puis calculer u_1 et u_2.
b. Donner la définiton par récurrence de la suite (u_n).
c. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

2. On considère une suite auxiliaire (a_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$a_n = u_n - 50$$
a. Montrer que (a_n) est une suite géométrique de raison $1,1$ et de premier terme $a_0 = 50$.
b. En déduire la définition de la suite (a_n) par une formule explicite.

3. **a.** En déduire la définition de la suite (u_n) par une formule explicite.
b. Conjecturer sur la limite de la suite (u_n).
c. Décrire une méthode qui permettrait de déterminer le nombre minimal de mois pour que Réda double son nombre de neurones.

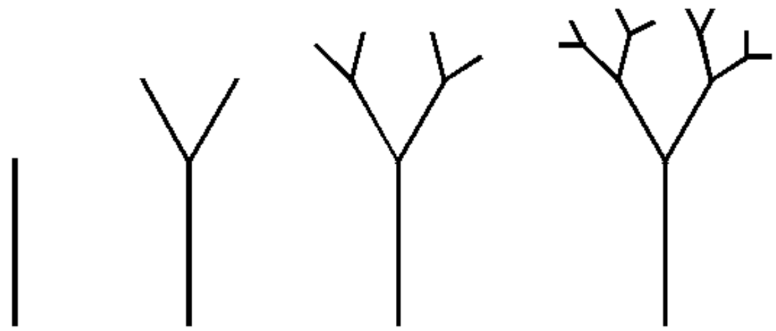
Exercice 3 (3 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_1.
On sait que $u_{37} = 100$ et que $u_{50} = 79$

Déterminer la raison de (u_n) et la valeur du terme u_1.

Exercice 4 (5 points)

Voici 4 étapes de constructions d'un arbre :



Soit les suites :

- (u_n), avec le terme u_n représentant le nombre de segments à l'étape n ;
- (s_n), avec le terme s_n représentant le nombre de segments additionnels à l'étape n (par rapport à l'étape précédente) ;

1. Donner la valeur des 4 premiers termes de (u_n).

2. Donner la valeur des 3 premiers termes de (s_n).

3. Déterminer une expression explicite de s_n.

4. En déduire une expression explicite de u_n.

Exercice bonus (optionnel)

Exprimer sous forme explicite la suite de 1er terme u_0 définie, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = a\,u_n + b \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

