Variables Aléatoires

MatheX

12 mai 2024

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition 1 : (variable aléatoire discrète)

Soit une expérience aléatoire avec un nombre d'issues fini.
Soit son univers $\Omega = \{\ s_1\ ;\ s_2\ ;\ \ldots\ldots;\ s_m\}$

Une variable aléatoire dicrète sur Ω est une fonction X qui à chaque issue (s_i) de Ω associe un nombre réel :

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) \subset \mathbb{R} \\ & s_i & \longmapsto & X(s_i) \quad ou \quad x_i \end{array}$$

Notation :
L'évènement $\{X = x_i\}$ est formé de toutes les issues dont l'image par X est x_i (idem pour $\{X < x_i\}, \cdots$)

Exemple :

E : "Lancer d'un dé " $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Si je fais 6, je gagne 3 points. Si je fais 1, je perds 3 points. Dans les autres cas, walou.

Variable aléatoire : X représentant le gain (ou la perte)

Issue (s_i)	1	2	3	4	5	6
X (x_i)	-3	0	0	0	0	3

$X(\Omega) = \{-3; 0; 3\}$
$\{X = 0\} = \{2, 3, 4, 5\}$ $\{X \leq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Définition 2 : (Loi de probabilité d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire discrère sur Ω avec
$X(\Omega) = \{ x_1 \; ; \; x_2 \; ; \; \ldots ; \; x_n \}$

La loi de probabilité de X est donné par la probabilité de chaque évènement $\{X = x_i\}$:

$$\begin{array}{rrcl} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ & \{X = x_i\} \subset \Omega & \longmapsto & P(\{X = x_i\}) \quad ou \quad P_i \end{array}$$

NB : $$\sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé " $\quad \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Si je fais 6, je gagne 3 points. Si je fais 1, je perds 3 points. Dans les autres cas, walou.

$X(x_i)$	-3	0	3
$\{X = x_i\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{6}{6} = 1$$

2. Espérance, variance et écart-type

Définition 3 : (espérance)

L' espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire X est le nombre :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i} x_i \times P_i}$$

avec $x_i \in X(\Omega)$ et $P_i = P\{X = x_i\}$

NB :
L'espérance représente une moyenne (espérance de gain)

Exemple :

$X(x_i)$	-3	0	3
$\{X = x_i\}$	$\{1\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{6\}$
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i \times P_i \\ &= -3 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{4}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$X(x_i)$	-6	-1	6
$\{X = x_i\}$	$\{1\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{6\}$
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i \times P_i \\ &= -6 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{4}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Définition 4 : (variance, écart-type)

La variance $V(X)$ d'une variable aléatoire X est le nombre :

$$\boxed{V(X) = \sum_i P_i(x_i - E(X))^2}$$

L' écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X est le nombre :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

NB :
Ces indicateurs mesurent la dispersion autour de l'espérance.

Exemple :

$X(x_i)$	-6	-1	6
$\{X = x_i\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$V(X) = \sum_i P_i(x_i - E(X))^2$$
$$= \frac{1}{6} \times \left(-6 - (-\frac{2}{3})\right)^2 + \frac{4}{6} \times \left(-1 - (-\frac{2}{3})\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(6 - (-\frac{2}{3})\right)^2 \simeq 12,22$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$
$$\simeq \sqrt{12,22} \simeq 3,49$$

Propriété 1 : (linéarité et simplification)

Soit a et b des nombres réels.

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b} \tag{1}$$

$$\boxed{V(aX) = a^2V(X)} \tag{2}$$

$$\boxed{V(X) = \sum_i P_i x_i^2 - \left[E(X)\right]^2} \tag{3}$$

Exemple :

(1) Soit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$, on a :
$E(Y) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1$

(2) Soit la variable aléatoire $Z = 3X$, on a :
$E(Z) = E(3X) = 3E(X)$
$V(Z) = 3^2 V(X) = 9V(X)$

(3) Sur l'exemple de la définition de la variance, on a :

$$V(X) = \sum_i P_i x_i^2 - \left[E(X)\right]^2$$
$$= \frac{1}{6} \times (-6)^2 + \frac{4}{6} \times (-1)^2 + \frac{1}{6} \times (6)^2 - \frac{2}{3}^2 \simeq 12,22$$