Probabilité

MatheX

3 septembre 2020

1. Vocabulaire

Définition 1 : (expérience aléatoire, issue, univers)

Une expérience aléatoire (E) est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

Une issue (x_i) est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

L' univers (Ω) est l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire :

$$\boxed{\Omega = \{\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ ;\ x_n\}}$$

Exemple :

E_1 : "Lancer d'un dé classique"
$\Omega_1 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

E_2 : "Lancer de deux dés classiques"

$$\begin{aligned}\Omega_2 = \{&(1\,;1)\,;(1\,;2)\,;(1\,;3)\,;(1\,;4)\,;(1\,;5)\,;(1\,;6)\,;\\ &(2\,;1)\,;(2\,;2)\,;(2\,;3)\,;(2\,;4)\,;(2\,;5)\,;(2\,;6)\,;\\ &(3\,;1)\,;(3\,;2)\,;(3\,;3)\,;(3\,;4)\,;(3\,;5)\,;(3\,;6)\,;\\ &(4\,;1)\,;(4\,;2)\,;(4\,;3)\,;(4\,;4)\,;(4\,;5)\,;(4\,;6)\,;\\ &(5\,;1)\,;(5\,;2)\,;(5\,;3)\,;(5\,;4)\,;(5\,;5)\,;(5\,;6)\,;\\ &(6\,;1)\,;(6\,;2)\,;(6\,;3)\,;(6\,;4)\,;(6\,;5)\,;(6\,;6)\ \}\end{aligned}$$

E_3 : ".."
$\Omega_3 = \{\ \ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Définition 2 : (évènement)

Un évènement (A) est un sous-ensemble de l'univers (Ω) :

$$\boxed{A \subset \Omega}$$

NB :
Un évènement élémentaire contient une seule issue.
Un évènement impossible ne contient aucune issue (ensemble vide : $\varnothing$)
Un évènement certain contient toutes les issues possibles.
L'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$, contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.

Exemple :

E : "Lancer d'un dé classique" $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

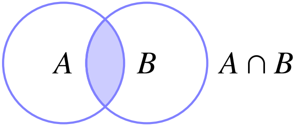
P : "Obtenir un résultat pair" $\longrightarrow$ $P = \{2\,;4\,;6\}$
I : "Obtenir un résultat impair" $\longrightarrow$ $I = \{1\,;3\,;5\}$
A : "Obtenir un résultat ≥ 3" $\longrightarrow$ $A = \{3\,;4\,;5\,;6\}$
B : "Obtenir un résultat ≥ 6" $\longrightarrow$ $B = \{6\}$
C : "Obtenir un résultat > 6" $\longrightarrow$ $C = \varnothing$
D : "Obtenir un résultat ≤ 6" $\longrightarrow$ $D = \Omega$

NB :
I est l'évènement contraire de P : $I = \overline{P}$
B est un évènement élémentaire
C est un évènement impossible
D est un évènement certain

Définition 3 : (union, intersection)

Soit A et B deux évènements.

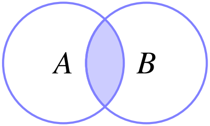
L'intersection de A et de B est



Définition 3 : (union, intersection)

Soit A et B deux évènements.

L'intersection de A et de B est un évènement qui contient les issues qui réalisent à la fois A et B

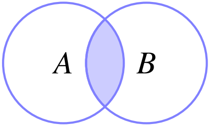


$A \cap B$

Définition 3 : (union, intersection)

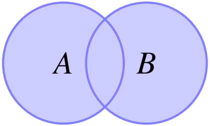
Soit A et B deux évènements.

L'intersection de A et de B est un évènement qui contient les issues qui réalisent à la fois A et B



$A \cap B$

L'union de A et de B est

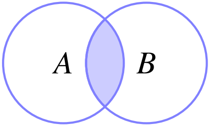


$A \cup B$

Définition 3 : (union, intersection)

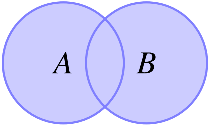
Soit A et B deux évènements.

L'intersection de A et de B est un évènement qui contient les issues qui réalisent à la fois A **et** B



$A \cap B$

L'union de A et de B est un évènement qui contient les issues qui réalisent A **ou** B

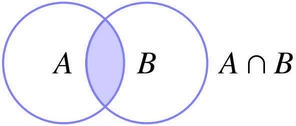


$A \cup B$

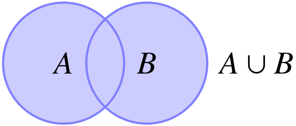
Définition 3 : (union, intersection)

Soit A et B deux évènements.

L'intersection de A et de B est un évènement qui contient les issues qui réalisent à la fois A et B



L'union de A et de B est un évènement qui contient les issues qui réalisent A ou B



NB :
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles (ou disjoints)

Exemple :

E : "Lancer d'un dé classique" $\quad \Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

A : "Obtenir un résultat ≥ 3" $\longrightarrow$ $A = \{3\,;4\,;5\,;6\}$

P : "Obtenir un résultat pair" $\longrightarrow$ $P = \{2\,;4\,;6\}$

I : "Obtenir un résultat impair" $\longrightarrow$ $I = \{1\,;3\,;5\}$

$A \cup P = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

$A \cap P = \{4\,;6\}$

$A \cup I = \{1\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

$A \cap I = \{3\,;5\}$

$P \cup I = P \cup \overline{P} = \Omega \quad \Longrightarrow \quad$ P et I forme une partition de Ω

$P \cap I = P \cap \overline{P} = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad$ P et I sont incompatibles

2. Calculs de probabilité

Définition 4 : (loi de probabilité)

Une loi de probabilité est une fonction qui à chaque issue (x_i) de l'univers associe un nombre (p_i) entre 0 et 1 :

$$\begin{array}{rccl} p : & \Omega & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x_i & \longmapsto & p(x_i) \quad ou \quad p_i \end{array}$$

La somme des probabilités des issues est égale à 1 :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1}$$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé truqué" $\quad \Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Loi de probabilité :

Issue (x_i)	1	2	3	4	5	6
Probablité (p_i)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = \frac{10}{10} = 1$$

Propriété 1 : (équiprobabilité : probabilité d'une issue)

Soit une expérience aléatoire équiprobable (toutes les issues ont la même probabilité) à n issues.

La probabilité d'une issue est : $\boxed{p = \frac{1}{n}}$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé équilibré" $\quad \Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Toutes les issues ont la même probailité p donc :

$$\sum_{i=1}^{6} p = 6p = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{6}$$

Loi de probabilité :

Issue (x_i)	1	2	3	4	5	6
Probablité (p_i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition 5 : (probabilité d'un évènement)

La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent A :

$$\boxed{p(A) = \sum_i p(x_i) \quad \text{avec } x_i \in A}$$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé truqué" $\quad \Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Loi de probabilité :

Issue (x_i)	1	2	3	4	5	6
Probablité (p_i)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

P : "Obtenir un résultat pair" $\longrightarrow$ $p(P) = p(x_2) + p(x_4) + p(x_6)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

I : "Obtenir un résultat impair" $\longrightarrow$ $p(I) = 1 - p(P) = \frac{2}{5}$

A : "Obtenir un résultat > 3" $\longrightarrow$ $p(A) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

Propriété 2 : (équiprobabilité : probabilité d'un évènement)

Soit une expérience aléatoire équiprobable E et un évènement A.

La probabilité de A est :

$$\boxed{p(A) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ de\ E}}$$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé non truqué" $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Loi de probabilité :

Issue (x_i)	1	2	3	4	5	6
Probablité (p_i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

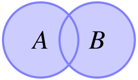
P : "Obtenir un résultat pair" $\longrightarrow$ $p(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

I : "Obtenir un résultat impair" $\longrightarrow$ $p(I) = 1 - p(P) = \frac{1}{2}$

A : "Obtenir un résultat ≥ 3" $\longrightarrow$ $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Propriété 3 : (probabilité union et intersection)

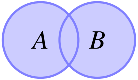
$$p(A \cup B) =$$



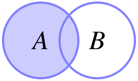
$A \cup B$

Propriété 3 : (probabilité union et intersection)

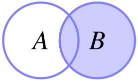
$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$



$A \cup B$



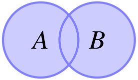
A



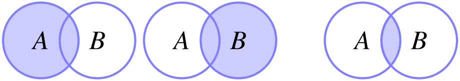
B

Propriété 3 : (probabilité union et intersection)

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$



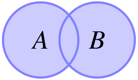
$A \cup B$



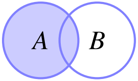
A B $A \cap B$

Propriété 3 : (probabilité union et intersection)

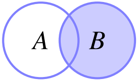
$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$



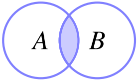
$A \cup B$



A



B



$A \cap B$

NB :

si A et B sont indépendants alors $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé truqué" $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Loi de probabilité :

Issue (x_i)	1	2	3	4	5	6
Probablité (p_i)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

P : "Obtenir un résultat pair" $\longrightarrow$ $p(P) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$

A : "Obtenir un résultat ≥ 5" $\longrightarrow$ $p(A) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$

$A \cap P$: "Obtenir un résultat à la fois pair et ≥ 5"
$\longrightarrow$ $p(A \cap P) = p(\{6\}) = \frac{3}{10}$

$A \cup P$: "Obtenir un résultat pair ou ≥ 5"
$\longrightarrow$ $p(A \cup P) = p(A) + p(P) - p(A \cap P) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$

Exemple 2 :

Je sais que parmi les 30 élèves de la 219 :
- il y a 16 filles
- 26 élèves ont choisi la spé Maths en 1ère
- 14 filles ont choisi la spé Maths en 1ère

Si je choisis un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit une fille ou qu'il est choisi la spé Maths ?

E : "choisir un élève de la classe"
F : "Fille"
M : "choix de la spé Maths en 1ère"

$$p(F \cup M) = p(F) + p(M) - p(F \cap M) = \frac{16}{30} + \frac{26}{30} - \frac{14}{30} = \frac{28}{30}$$

Propriété 4 : (probabilité évènement contraire)

$$\boxed{p(\overline{A}) = \quad}$$

Propriété 4 : (probabilité évènement contraire)

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

Ch9 : Probabilité

Calculs de probabilité - Probabilité évènement contraire

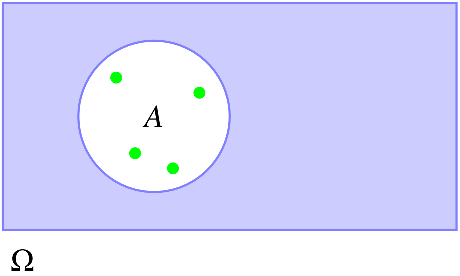
Propriété 4 : (probabilité évènement contraire)

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

Ω

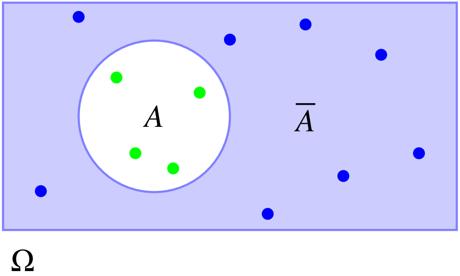
Propriété 4 : (probabilité évènement contraire)

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$



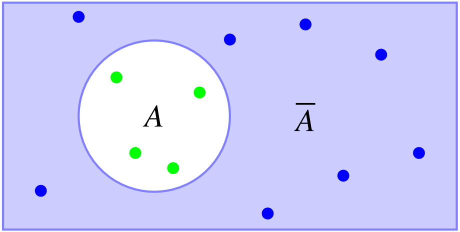
Propriété 4 : (probabilité évènement contraire)

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$



Propriété 4 : (probabilité évènement contraire)

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$



$$\Omega = A \cup \overline{A}$$

Exemple :

E : "Lancer d'un dé truqué" $\quad \Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Loi de probabilité :

Issue (x_i)	1	2	3	4	5	6
Probablité (p_i)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

A : "Obtenir un résultat < 6"

$\rightarrow$ $\overline{A}$: "Obtenir un résultat ≥ 6"

$$\rightarrow \; p(A) = 1 - p(\overline{A})$$
$$= 1 - \frac{3}{10}$$
$$= \frac{7}{10}$$

Méthode 1 : (tableau, arbre)

Pour étudier des probabilités et notamment pour dénombrer, il est utile d'utiliser :

- un tableau à double entrée
- un arbre de probabilité

Exemple :

Je sais que parmi les 30 élèves de la 219, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe"
F : "Fille" M : "choix de la spé Maths"

	F	$\overline{F}$	Total
M			
$\overline{M}$			
Total			

Exemple :

Je sais que parmi les 30 élèves de la 219, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe"
F : "Fille" M : "choix de la spé Maths"

	F	$\overline{F}$	Total
M	14		26
$\overline{M}$			
Total	16		30

Exemple :

Je sais que parmi les 30 élèves de la 219, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe"
F : "Fille" M : "choix de la spé Maths"

	F	$\overline{F}$	Total
M	14	12	26
$\overline{M}$	2		4
Total	16	14	30

Exemple :

Je sais que parmi les 30 élèves de la 219, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe"
F : "Fille" M : "choix de la spé Maths"

	F	$\overline{F}$	Total
M	14	12	26
$\overline{M}$	2	2	4
Total	16	14	30

Exemple :

Je sais que parmi les 30 élèves de la 219, il y a 16 filles et que parmi les 26 élèves qui ont choisi la spé Maths, il y a 14 filles

E : "choisir un élève de la classe"
F : "Fille" M : "choix de la spé Maths"

	F	$\overline{F}$	Total
M	$14 : M \cap F$	$12 : M \cap \overline{F}$	$26 : M = (M \cap F) \cup (M \cap \overline{F})$
$\overline{M}$	$2 : \overline{M} \cap F$	$2 : \overline{M} \cap \overline{F}$	$4 : \overline{M} = (\overline{M} \cap F) \cup (\overline{M} \cap \overline{F})$
Total	$16 : F$	$14 : \overline{F}$	$30 : F \cup \overline{F} = M \cup \overline{M}$

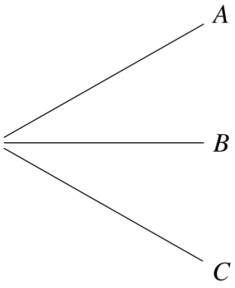
Exemple 2 : On dispose de trois boules A, B et C

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

Exemple 2 : On dispose de trois boules A, B et C

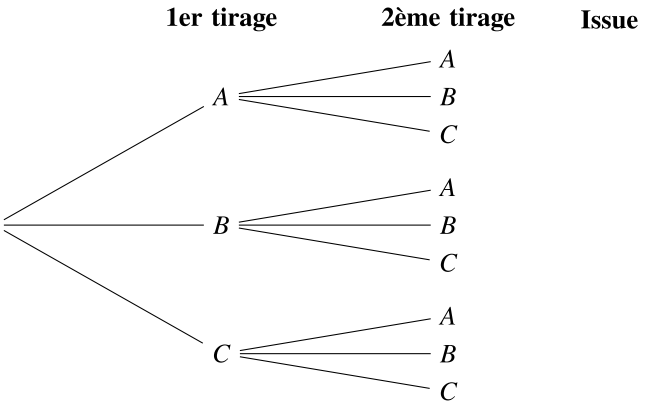
E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"

1er tirage



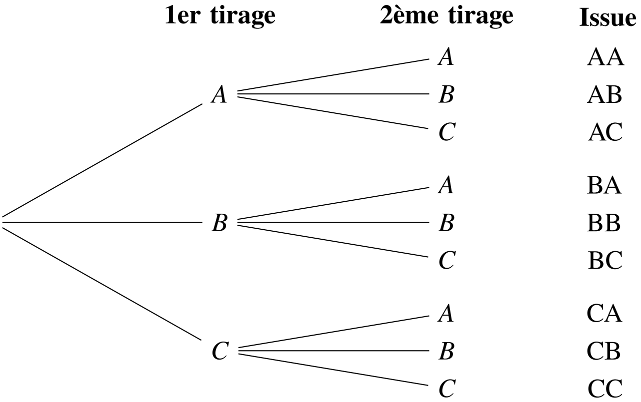
Exemple 2 : On dispose de trois boules A, B et C

E : "choisir, successivement et avec remise , deux boules"



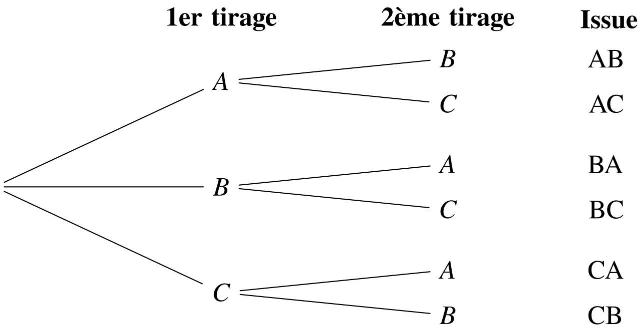
Exemple 2 : On dispose de trois boules A, B et C

E : "choisir, successivement et avec remise, deux boules"



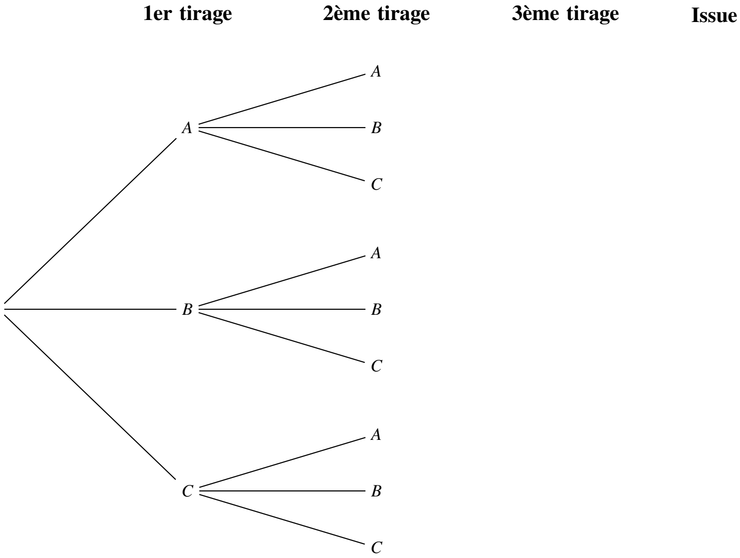
Exemple 3 : On dispose de trois boules A, B et C

E : "choisir, successivement et sans remise , deux boules"



Exemple 4 : Trois boules avec remise

Exemple 4 : Trois boules avec remise



Exemple 4 : Trois boules avec remise