Variation d'une fonction et extremum

MatheX

7 mai 2021

Variation d'une fonction et extremum

Table des matières :

Variation d'une fonction et extremum

Table des matières :

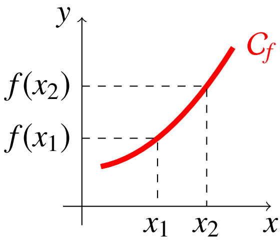
Variation d'une fonction et extremum

Définition 1 : (variation)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

- f est croissante sur I ssi :

pour tout nombre x_1 et x_2 de I, $\boxed{x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$



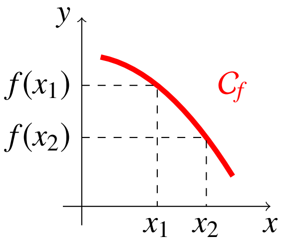
Une fonction croissante conserve l'ordre

Variation d'une fonction et extremum

Suite Définition 1 :

- f est **décroissante** sur I ssi :

pour tout nombre x_1 et x_2 de I, $\boxed{x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)}$



Une fonction décroissante inverse l'ordre

Variation d'une fonction et extremum

Suite Définition 1 :

◦ f est **constante** sur I ssi :

pour tout nombre x_1 et x_2 de I, $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$

◦ f est **monotone** sur I ssi :

soit f est croissante sur I, soit f est décroissante sur I

(f ne change pas de variation sur I)

NB :

f est **strictement** croissante $\cdots$ $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

f est **strictement** décroissante $\cdots$ $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Variation d'une fonction et extremum

Table des matières :

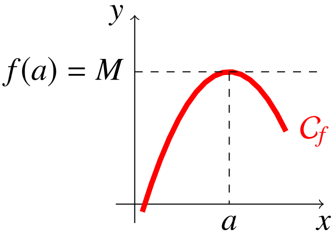
Variation d'une fonction et extremum

Définition 2 : (extremum)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

- M est le maximum de f sur I ssi :

il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et $\boxed{f(x) \leq M \quad \text{pour tout } x \in I}$



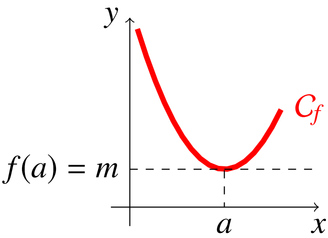
Une fonction peut ne pas avoir de maximum

Variation d'une fonction et extremum

suite Définition 2 :

∘ m est le **minimum** de f sur I ssi :

il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$ et $\boxed{f(x) \geq m \quad \text{pour tout } x \in I}$

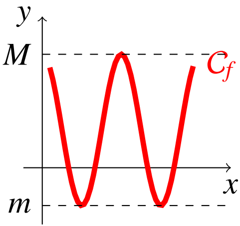


Une fonction peut ne pas avoir de minimum

Variation d'une fonction et extremum

suite Définition 2 :

- un extremum est soit un minimum soit un maximum



Une fonction peut ne pas avoir d'extremum

Variation d'une fonction et extremum

Table des matières :

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

a. $f(x) = x - 1$

b. $g(x) = -x + 1$

Variation d'une fonction et extremum

Exemple :

Étudiez la variation des fonctions :

a. $f(x) = x - 1$ $\quad f$ définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow x_1 - 1 \leq x_2 - 1 \\ &\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{aligned}$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$		↗		$+\infty$

D'après ce tableau de variations,
f n'a pas d'extremum

b. $g(x) = -x + 1$ $\quad g$ définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\Rightarrow -x_1 \geq -x_2 \\ &\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{aligned}$$

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$		↘		$-\infty$

D'après ce tableau de variations,
g n'a pas d'extremum

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

c. $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Variation d'une fonction et extremum

Exemple :

Étudiez la variation des fonctions :

c. $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ f est définie sur $\mathbb{R}$

- <u>si $a > 0$</u> :

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow ax_1 \leq ax_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$

f n'a pas d'extremum

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

- <u>si $a < 0$</u> :

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow ax_1 \geq ax_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

f n'a pas d'extremum

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

- <u>si $a = 0$</u> : $f(x) = b \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$ et admet b comme minimum et maximum

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

d. Fonction carré : $f(x) = x^2$

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

d. Fonction carré : $f(x) = x^2$ $\qquad f$ est définie sur $\mathbb{R}$

- <u>sur $\mathbb{R}^+$</u> :

$0 \leq x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; x_1^2 \leq x_2 \cdot x_1 \quad (1)$

$0 \leq x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; x_1 \cdot x_2 \leq x_2^2 \quad (2)$

(1) *et* $(2) \;\Rightarrow\; x_1^2 \leq x_2^2$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

- <u>sur $\mathbb{R}^-$</u> :

$x_1 \leq x_2 \leq 0 \;\Rightarrow\; x_1^2 \geq x_2 \cdot x_1 \quad (1)$

$x_1 \leq x_2 \leq 0 \;\Rightarrow\; x_1 \cdot x_2 \geq x_2^2 \quad (2)$

(1) *et* $(2) \;\Rightarrow\; x_1^2 \geq x_2^2$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0 est le minimum de f (atteint en $x = 0$)

Variation d’une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

e. Fonction cube : $f(x) = x^3$

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

e. Fonction cube : $f(x) = x^3$ $\quad$ f est définie sur $\mathbb{R}$

- <u>sur $\mathbb{R}^+$</u> :

$0 \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1^2 \leq x_2^2$

$\Rightarrow x_1^3 \leq x_2^2 \cdot x_1 \leq x_2^2 \cdot x_2 = x_2^3$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

- <u>sur $\mathbb{R}^-$</u> :

$x_1 \leq x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1^2 \geq x_2^2$

$\Rightarrow x_1^3 \leq x_2^2 \cdot x_1 \leq x_2^2 \cdot x_2 = x_2^3$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^-$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

f n'admet pas d'extremum

Variation d'une fonction et extremum

Exemple :

Étudiez la variation des fonctions :

f. Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

f. Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

◦ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$0 < x_1 \leq x_2 \Rightarrow 1 \leq \dfrac{x_2}{x_1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_2} \leq \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

◦ sur $\mathbb{R}^{-*}$:

$x_1 \leq x_2 < 0 \Rightarrow 1 \geq \dfrac{x_2}{x_1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_2} \leq \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	
f	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

f n'admet pas d'extremum

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

d. Fonction carré : $f(x) = \sqrt{x}$

Variation d'une fonction et extremum

Exemple : *Étudiez la variation des fonctions :*

d. Fonction carré : $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ f est définie sur $\mathbb{R}^+$

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right) < 0$$

$\Rightarrow \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq 0$ $\quad$ (on divise par $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$ qui est strictement positif)

$\Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

0 est le minimum de f (atteint en $x = 0$)