

**DS06****PGCD**

Durée de l'épreuve : **50 minutes**

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.*

*Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.*

*Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.*

**Exercice 1**

1. Calculer le PGCD de 134 et 80 par l'algorithme d'Euclide.
2. Démontrer que 67 et 40 sont premiers entre eux (sans utiliser la décomposition en produits de nombres premiers).
3. Déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $67u + 40v = 1$  en utilisant la remontée de l'algorithme d'Euclide.
4. Déterminer les couples d'entiers relatifs  $(a; b)$  tel que  $134a = 80b$ .

**Exercice 2**

On rappelle que  $PGCD(a; b) = PGCD(a - b; b)$  (méthode de la soustraction).

1. Calculer le PGCD de 54 et 26 par soustractions successives.
2. Démontrer cette propriété.
3. Ecrire, en langage naturel ou en Python, un algorithme de calcul du PGCD par soustractions successives.

**Exercice 3**

Maria et Inès veulent s'échanger des souvenirs mais Maria ne dispose que de billets de 12 coeurs et Inès ne dispose que de billet de 20 coeurs, chacune ayant suffisamment de billets pour réaliser toutes les transactions possibles.

1. **a.** Inès veut acheter de Maria le souvenir n°1 valorisé à 8 coeurs. Déterminer une solution, c'est à dire un nombre de billets de chaque valeur à échanger pour réaliser la transaction.  
**b.** Maria veut acheter de Inès le souvenir n°2 valorisé à 8 coeurs. Déterminer une solution.
2. Inès veut acheter de Maria un souvenir valorisé à  $x$  coeurs, avec  $x$  un entier naturel. Déterminer toutes les solutions possibles selon la valeur de  $x$ .

**Exercice bonus (optionnel)** Soit un engrenage composé d'une roue de 15 dents et d'une roue de 12 dents, déterminer le nombre de dents qui doivent passer pour que la 4ème dent de la 1ère roue coïncide avec la 10ème dent de la 2ème roue. Justifier par un calcul.

