DS 02

Divisibilité

Durée de l'épreuve : **55 minutes**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n$ divise $2n+1$.

2. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n+1$ divise $3n$.

3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-1$ divise n^2+3n-2.

Exercice 2

1. Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 15$

2. Déterminer les entiers naturels x et y tels que $x + y = xy$

Exercice 3

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de -13 par 3.

2. Déterminer les entiers naturels n tels que $3n - 36 \equiv 1\,[12]$.

3. Déterminer les inverses modulo 4 éventuels de 2 et 3.

4. Démontrer que si un nombre admet un inverse modulo n alors cet inverse est unique modulo n.

Exercice 4

Le 17/11/2025, déterminer les restes de la division euclidienne de 2025^{2025} par 11 puis par 17.

Exercice 5

1. Un nombre est divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre son nombre de dizaines et son chiffre des unités est divisible par 11.

- **a.** Compléter la congruence : $10 \equiv \cdots\,[11]$.
- **b.** Démontrer ce critère de divisibilité par 11.

2. Soit $S = 1 + 2 + \cdots + n$ avec un n un entier naturel strictement supérieur à 1.
Déterminer le reste de la division euclidienne par n de S.

Exercice bonus (optionnel)

Démonter que x possède un inverse modulo n est équivalent à x et n sont premiers entre eux.