

**DS 01**

Nombres Complexes : point de vue algébrique

Durée de l'épreuve : **55 minutes***L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.**Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.***Exercice 1**

Mettre sous forme algébrique :

1.  $z = (1 + 2i)(1 - 2i)(1 + i)$

2.  $z = \frac{1}{i - 1}$

3.  $z = \frac{1 + 2i}{i - 2}$

**Exercice 2**Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations ci-après :

1.  $z = 1 - \bar{z}$

2.  $z^2 - z = -1$

3.  $4z^4 - 1 = 0$

**Exercice 3**Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$ .**Exercice 4**Soit le nombre complexe  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  des réels, tel que :  $z^2 = i$ 1. Montrer que  $z^2 \cdot \bar{z}^2 = 1$ 2. Montrer que  $x^2 + y^2 = 1$ .3. Résoudre l'équation  $z^2 = i$ .**Exercice 5**1. Soit  $P_2(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$  un polynôme de degré 2 à coefficient réels.Soit  $z_1$  et  $z_2$  les racines, éventuellement confondues, de  $P_2(z)$  dans  $\mathbb{C}$ .Montrer que  $z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}$  et que  $z_1 \times z_2 = \frac{a_0}{a_2}$ .2. Soit  $P_3(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$  un polynôme de degré 3 à coefficient réels.Soit  $z_1, z_2$  et  $z_3$  les racines, éventuellement confondues, de  $P_3(z)$  dans  $\mathbb{C}$ .Montrer que  $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}$  et que  $z_1 \times z_2 \times z_3 = -\frac{a_0}{a_3}$ .**Exercice bonus (optionnel)** Résoudre  $z^2 = a + ib$ .