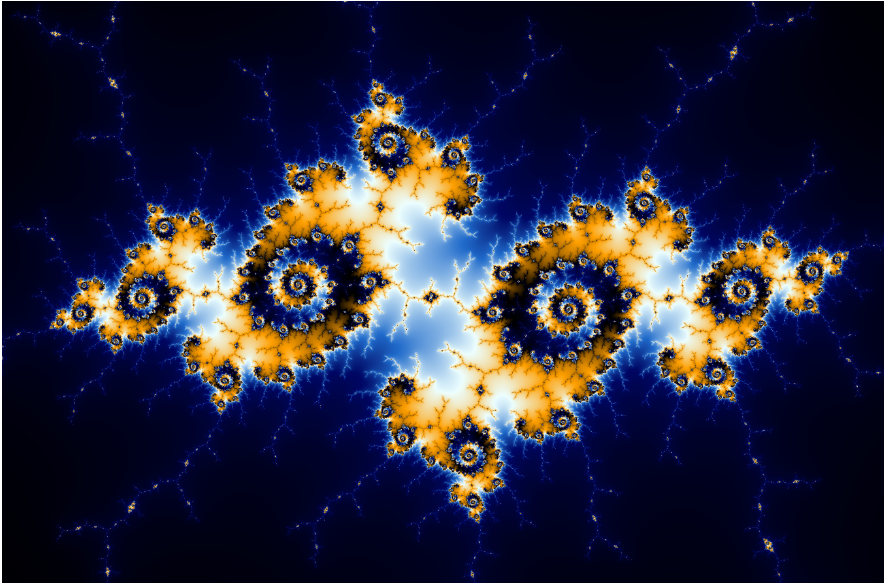
Nombres complexes

MatheX

27 septembre 2024



Partie A : point de vue algébrique

Nombres complexes

Table des matières :

Nombres complexes

Table des matières :

Nombres complexes

Théorème 1 : (existence de $\mathbb{C}$)

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes avec les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et possède une addition et une mutliplication avec les mêmes règles de calcul que celles sur $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ contient un nombre (non réel) noté i qui vérifie :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

- chaque éléments z de $\mathbb{C}$ a une écriture unique de la forme :

$$\boxed{z = a + ib} \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des réels}$$

NB :
La forme $z = a + ib$ est la forme algébrique de z avec :

- a sa partie réelle : $a = Re(z)$;
- b sa partie imaginaire : $b = Im(z)$.

Nombres complexes

Propriété 1 : (égalité dans $\mathbb{C}$)

soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\boxed{z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'}$$

NB

En particulier, on a :

$$\boxed{z = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0}$$

Nombres complexes

Démonstration :

Nombres complexes

Définition 1 : (nombre conjugué)

Soit $z = a + ib$.

Le nombre conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le nombre :

$$\boxed{\bar{z} = a - ib}$$

Nombres complexes

Table des matières :

Nombres complexes

Propriété 2 : (extension des règles de calculs de $\mathbb{R}$)

$$z + z' = z' + z \qquad zz' = z'z \qquad \text{(commutativité)}$$

$$(z + z') + z" = z + (z' + z") \qquad (zz')z" = z(z'z") \qquad \text{(associativité)}$$

$$z(z' + z") = zz' + zz" \qquad \text{(distributivité)}$$

$$z + 0 = z \qquad z \times 1 = z \qquad \text{(éléments neutres)}$$

$$zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0 \qquad \text{(équation produit)}$$

Propriété 3 : (linéarité des parties réelle et imaginaire)

$$Re(z+z') = Re(z) + Re(z')$$
$$Im(z+z') = Im(z) + Im(z')$$

$$Re(kz) = k\,Re(z) \qquad \text{avec } k \text{ un réel}$$
$$Im(kz) = k\,Im(z) \qquad \text{avec } k \text{ un réel}$$

Nombres complexes

Propriété 4 : (identités remarquables)

$$(a+ib)^2 = (a^2-b^2)+2iab \tag{1}$$

$$(a-ib)^2 = (a^2-b^2)-2iab \tag{2}$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = z\,\bar{z} \tag{3}$$

Propriété 5 : (opérations avec les conjugués)

$$z + \overline{z} = 2\,Re(z) \tag{1}$$
$$z - \overline{z} = 2i\,Im(z) \tag{2}$$
$$z\,\overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \tag{3}$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \tag{4}$$
$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \tag{5}$$
$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \text{pour tout entier naturel } n \tag{6}$$
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{si } z \neq 0 \tag{7}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad \text{si } z' \neq 0 \tag{8}$$

Propriété 6 : (produit, inverse et quotient)

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$$z\,z' = (a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \tag{1}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{si } z \neq 0 \tag{2}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\,\overline{z'}}{z'\,\overline{z'}} = \frac{aa' - bb'}{a'^2 + b'^2} - i\frac{ab' + a'b}{a'^2 + b'^2} \quad \text{si } z' \neq 0 \tag{3}$$

Nombres complexes

Table des matières :

Nombres complexes

Propriété 7 : (polynôme du second degré)

Soit $f(z) = az^2 + bz + c$ avec a, b et c des réels ($a \neq 0$).

Les racines et la factorisation de f sur $\mathbb{C}$ sont :

	Racines	Factorisation
$\Delta > 0$	$\boxed{z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$	$\boxed{a(z-z_1)(z-z_2)}$
$\Delta = 0$	$\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$	$\boxed{a(z-z_0)^2}$
$\Delta < 0$	$\boxed{z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{\|\Delta\|}}{2a} \quad z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{\|\Delta\|}}{2a}}$	$\boxed{a(z-z_1)(z-z_2)}$

Nombres complexes

Démonstration :

Nombres complexes

Propriété 8 : (factorisation de $z^n - a^n$)

$$\boxed{z^n - a^n = (z-a)Q(z)}$$

avec $Q(z)$ un polynôme de degré $n-1$

NB : $$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

Nombres complexes

Démonstration :

Nombres complexes

Propriété 9 : (factorisation par une racine)

Soit $P(z)$ un polynôme de degré n à coefficient réels.
Soit a une racine de P : $P(a) = 0$.

P est alors factorisable par $z - a$:

$$\boxed{P(z) = (z - a)Q(z)}$$

avec $Q(z)$ un polynôme de degré $n - 1$

Nombres complexes

Démonstration :

Nombres complexes

Propriété 10 : (nombre de racines)

Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Nombres complexes

Démonstration :