

**DS03**

Récurrence, Limites de suites, Limites de fonctions

Durée de l'épreuve : **01h55***L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.**Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.***Exercice 1 (5 points)**

Déterminez les limites de :

1.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
2.  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  en  $-\infty$ , en  $-1$ , en  $1$  et en  $+\infty$
3.  $h(x) = e^x - x$  en  $-\infty$ , en  $0$  et en  $+\infty$
4.  $i(x) = \frac{e^x - x}{e^x + x}$  en  $-\infty$ , en  $0$  et en  $+\infty$
5.  $j(x) = e^x(e^x - x)$  en  $-\infty$ , en  $0$  et en  $+\infty$

**Exercice 2 (4 points)**Soit les fonctions  $h(x) = e^{1-2x}$  et  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-2x}}$ .

Pour chacune de ces deux fonctions :

1. Écrire la fonction comme la composition de deux fonctions et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites de la fonction en  $-\infty$ ,  $-\frac{1}{2}$  et  $+\infty$  ainsi que ses asymptotes éventuelles.

**Exercice 3 (4 points)**

Aladdin vous propose un investissement pourri où chaque jour vous perdez 10 Dh et vous perdez 10% de ce que vous aviez le jour précédent. Votre mise initiale est de 20 Dh.

1. Montrez que vous aurez toujours plus de -100 Dh.
2. Déterminer si la perte liée à cet investissement est convergente.
3. Écrire un programme qui calcule le montant restant au bout d'un an.

**Exercice 4 (7 points)**Soit la fonction  $f(x) = (1 + x + x^2) \cdot e^{-2x+1}$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Préciser le domaine de dérivabilité de la fonction  $f$  et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les variations de  $f$
3. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
4. a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  par somme.  
b. Donner une interprétation graphique de cette limite.
5. a. Démontrer que pour tout réel  $x > 1$ , on a :  $1 < x < x^2$   
b. En déduire que pour tout réel  $x > 1$ , on a :  $0 < f(x) < 3x^2 e^{-2x+1}$   
c. Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $3x^2 \cdot e^{-2x+1} = \frac{3}{4} e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}}$   
d. En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$

**Exercice bonus (optionnel)** Démontrer la formule de la dérivée d'une fonction Composée.