Correction DS03

Récurrence, Limites de suites, Limites de fonctions

Durée de l'épreuve : **01h55**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

Déterminez les limites de :

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$

$$f(x) = x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \qquad \text{pour } x \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De même en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2. $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $-\infty$, en -1, en 1 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = \frac{0}{2} = 0 \qquad \text{car } g \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1} (x-1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} (x+1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-1^-} (x+1) = 0^-\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty \quad \text{par quotient}$$

$$g(x) = \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \qquad \text{pour } x \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 \quad \text{par quotient}$$

On procède de même en $+\infty$, ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

3. $h(x) = e^x - x$ en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0) = 1$ car h continue sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty \implies \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ par somme

$h(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$ pour $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \quad \text{par produit}$$

4. $i(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x + x}$ en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} i(x) = i(0) = 1$ par quotient

$i(x) = \dfrac{1 - \dfrac{x}{e^x}}{1 + \dfrac{x}{e^x}}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) = 1 \\ \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) = 1 \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = 1 \quad \text{par quotient}$$

$i(x) = \dfrac{\dfrac{e^x}{x} - 1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$ pour $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0 \implies \implies \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0 \implies \implies \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} + 1\right) = 1 \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = -1 \quad \text{par quotient}$$

5. $j(x) = e^x\left(e^x - x\right)$ en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} j(x) = j(0) = 1$ car j continue sur $\mathbb{R}$

$j(x) = e^{2x} - xe^x$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = 0 \quad \text{par somme}$$

$j(x) = xe^x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$ pour $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x \to +\infty} j(x) = +\infty \quad \text{par produit}$$

Exercice 2 (4 points)

Soit les fonctions $h(x) = e^{1-2x}$ et $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{1-2x}}$.
Pour chacune de ces deux fonctions :

1. Écrire la fonction comme la composition de deux fonctions et calculer sa dérivée.

$h = i \circ j$ avec $i(x) = e^x$ et $j(x) = 1 - 2x$
$h' = j' \times i' \circ j$ avec $j'(x) = -2$ et $i'(x) = e^x$
donc $h'(x) = -2e^{1-2x}$

$f = g \circ h$ avec $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $h(x) = e^{1-2x}$
$f' = h' \times g' \circ h$ avec $h'(x) = -2e^{1-2x}$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$
donc $f'(x) = -2e^{1-2x} \times \dfrac{-1}{(1-e^{1-2x})^2} = \dfrac{2e^{1-2x}}{(1-e^{1-2x})^2}$

2. Déterminer les limites de la fonction en $-\infty$, $-\dfrac{1}{2}$ et $+\infty$ ainsi que ses asymptotes éventuelles.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} (1-2x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$$

$$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} h(x) = h\left(-\frac{1}{2}\right) = e^2 \quad \text{car } h \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} (1-2x) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asymptote horizontale à } \mathscr{C}_h \text{ en } +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{1-X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty$$

$$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-e^2} \quad \text{car } f \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-2x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \dfrac{1}{1-X} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow y = 1 \text{ asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty$$

Exercice 3 (4 points)

Aladdin vous propose un investissement pourri où chaque jour vous perdez 10 Dh et vous perdez 10% de ce que vous aviez le jour précédent. Votre mise initiale est de 20 Dh.

1. Montrez que vous aurez toujours plus de -100 Dh.

On modélise le montant au jour n par la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 0,9\,u_n - 10 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Soit la propriété P_n : $u_n \geq -100$

◦ *Initialisation* :
avec $n = 0$: $u_0 = 20 \geq -100$
P_0 est vraie et la propriété est initialisée.

◦ *Hérédité* :
on suppose P_n vraie, on a donc $u_n \geq -100 \qquad (HR)$
On essaie de montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire que : $u_{n+1} = 0,9\,u_n - 10 \geq -100$

$$u_n \geq -100 \text{ et } f(x) = 0.9x - 10 \text{ est croissante } \Rightarrow \; u_{n+1} = f(u_n) \geq f(-100) = -100$$

P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire

◦ *Conclusion* :
la propriété est initialisée et héréditaire, donc par le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -100$

2. Déterminer si la perte liée à cet investissement est convergente.

On étudie la variation de la suite (u_n) :
$u_{n+1} - u_n = 0,9\,u_n - 10 - u_n = -0,1\,u_n - 10$
$u_n \geq -100 \;\Rightarrow\; -u_n \leq 100 \;\Rightarrow\; -0,1\,u_n \leq 10 \;\Rightarrow\; -0,1\,u_n - 10 \leq 0$
Donc (u_n) est une suite décroissante

On étudie la limite de la suite (u_n) à l'aide du théorème de convergence monotone :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) \text{ décroissante} \\ u_n \geq -100 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \; (u_n) \text{ est convergente et sa limite est supérieure ou égale à } -100.$$

La perte liée à cet investissement est convergente et sa limite est inférieure ou égale à 120 Dh.

3. Écrire un programme qui calcule le montant restant au bout d'un an.

```python
# définition de la fonction
def calcul_terme(n):
    u = 20    # u_0
    for i in range(n):
        # u_{n+1} = 0,9*u_{n} - 10
        u = 0.9 * u - 10
    return u


# appel de la fonction avec 365 en paramètre
u_365 = calcul_terme(365)

# affichage du montant restant au bout d'un an
print(u_365)
```


Exercice 4 (7 points)

Soit la fonction $f(x) = (1 + x + x^2) \cdot e^{-2x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Préciser le domaine de dérivabilité de la fonction f et calculer sa dérivée.

$f(x) = u(x) \times v(x) \quad$ avec $\quad u(x) = 1 + x + x^2 \quad$ et $\quad v(x) = e^{-2x+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \quad \text{avec} \quad u'(x) = 1 + 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = -2e^{-2x+1} \\ &= (1 + 2x) \cdot e^{-2x+1} - 2(1 + x + x^2) \cdot e^{-2x+1} \\ &= -\left(1 + 2x^2\right) \cdot e^{-2x+1} \end{aligned}$$

2. Déterminer les variations de f

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{-2x+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}$$

3. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

$f(x) = x^2 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot e^{-2x+1} \quad$ pour $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x+1} = +\infty \text{ (voir exercice 2)} \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

4. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x+1} + x \cdot e^{-2x+1} + x^2 \cdot e^{-2x+1} \\ &= e^{-2x+1} + x \cdot e^{-x} \cdot e^{-x} \cdot e^1 + x \cdot x \cdot e^{-x} \cdot e^{-x} \cdot e^1 \\ &= e^{-2x+1} + e^1 \cdot (xe^{-x}) \cdot e^{-x} + e^1 \cdot (xe^{-x}) \cdot (xe^{-x}) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x+1} = 0 \text{ (voir exercice 2)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^1 \cdot (xe^{-x}) \cdot e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^1 \cdot (xe^{-x}) \cdot (xe^{-x}) = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

b. Donner une interprétation graphique de cette limite.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

5. a. Démontrer que pour tout réel $x > 1$, on a : $\quad 1 < x < x^2$

$0 < 1 < x \implies 1 \times x < x \times x \iff x < x^2$

$1 < x$ et $x < x^2 \iff 1 < x < x^2$

b. En déduire que pour tout réel $x > 1$, on a : $\quad 0 < f(x) < 3x^2 e^{-2x+1}$

$1 < x \implies 1 + x < 2x$

$x < x^2$ et $1 + x < 2x \implies 1 + x < 2x^2 \implies 1 + x + x^2 < 3x^2$

$e^{-2x+1} > 0$ et $1 + x + x^2 < 3x^2 \implies f(x) < 3x^2 e^{-2x+1}$

$$\left.\begin{array}{r} 1 < x < x^2 \implies 1 + x + x^2 > 3 > 0 \\ e^{-2x+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies f(x) > 0 \quad \forall x > 1$$

c. Vérifier que pour tout réel x : $3x^2 \cdot e^{-2x+1} = \frac{3}{4} e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}}$

$3x^2 \cdot e^{-2x+1} = \frac{3}{4} 4x^2 e^{-2x} e^1 = \frac{3}{4} e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}}$

d. En déduire la limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{(2x)^2} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{4} e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}} = 0$$

On utilise le théorème des gendarmes :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0 \\ 0 < f(x) < 3x^2 e^{-2x+1} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{4} e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Exercice bonus (optionnel) Démontrer la formule de la dérivée d'une fonction COmposée.

