DS02

Limite de suites

Durée de l'épreuve : **01h55**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul.

1. $u_n = n - \dfrac{1}{n} - 1$ **2.** $u_n = n^2 - n + 1$ **3.** $u_n = \dfrac{1 - 2n + n^2}{3 + n - 2n^2}$ **4.** $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3^n - 1}$

Exercice 2 (2 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (u_n) converge vers 1.

Exercice 3 (4 points)

Pour chaque question, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul.

1. $u_n = \dfrac{sin(n)}{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{cos(n^2) - n^2}{n + 1}$ **3.** $u_n = \dfrac{(-1)^n - 2n + n^2}{3 + n - 2n^2}$ **4. (Bonus)** $u_n = \dfrac{2^n - (-3)^n}{3^n - 1}$

Exercice 4 (10 points)

Cet exercice est constitué de quatre questions correspondant à des approches différentes pour étudier la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$$

1. **a.** Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
b. Que peut-on en déduire sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

2. **a.** Montrer que la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 2$ est géométrique.
b. En déduire une expression explicite de la suite (a_n) et de la suite (u_n).
c. Que peut-on en déduire sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

3. **a.** Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c. Que peut-on en déduire sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

4. **a.** Écrire un programme en Python qui calcule le $100^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) (en utilisant sa définition par récurrence et non pas sa formulation explicite).
b. Que peut-on conjecturer sur la valeur de ce terme ?

Exercice bonus (optionnel) Etudier la limite d'une suite définie, pour entier naturel n, par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, avec a et b des nombres réels.

