

Correction DS02

Limite de suites

Durée de l'épreuve : 01h55

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul.

$$1. u_n = n - \frac{1}{n} - 1 \quad 2. u_n = n^2 - n + 1 \quad 3. u_n = \frac{1 - 2n + n^2}{3 + n - 2n^2} \quad 4. u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 1}$$

$$1. \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \frac{1}{n} - 1 \right) = +\infty \quad \text{par somme.}$$

$$2. u_n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1 \text{ par somme} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ par produit}$$

$$3. u_n = \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{-2n^2 \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2n^2} \right)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2n^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1 \text{ par somme} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2n^2} \right) = 1 \text{ par somme} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2n^2}} = 1 \quad \text{par quotient}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2} \quad \text{par produit}$$

$$4. u_n = \frac{-3^n \times \left(1 - \frac{2^n}{3^n} \right)}{3^n \times \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)} = (-1) \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) = 1 \\ \text{par somme} \\ -1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = 1 \\ \text{par somme} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1 \text{ par quotient et par produit}$$

Exercice 2 (2 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (u_n) converge vers 1.

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1 + \epsilon \iff -\epsilon < -\frac{1}{n} < \epsilon \iff -\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1 + \epsilon \\ -\epsilon < -\frac{1}{n} < \epsilon \\ -\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon \end{matrix}} \right\} \iff 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On prend $N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1$. (l'entier suivant la partie entière de l'inverse de ϵ)

On a bien alors :

pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $n \geq N$, $1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \square$

Exercice 3 (4 points)

Pour chaque question, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul.

$$1. u_n = \frac{\sin(n)}{n} \quad 2. u_n = \frac{\cos(n^2) - n^2}{n+1} \quad 3. u_n = \frac{(-1)^n - 2n + n^2}{3 + n - 2n^2} \quad 4. \text{ (Bonus) } u_n = \frac{2^n - (-3)^n}{3^n - 1}$$

1. Pour tout entier naturel n non nul :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \iff -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{car } n > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{d'après le théorème des gendarmes}$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(n^2) \leq 1 &\iff -1 - n^2 \leq \cos(n^2) - n^2 \leq 1 - n^2 \\ &\iff \frac{-1 - n^2}{n+1} \leq \frac{\cos(n^2) - n^2}{n+1} \leq \frac{1 - n^2}{n+1} \quad \text{car } n+1 > 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = -\infty \text{ par somme, quotient puis produit.}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq \frac{1 - n^2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2}{n+1} = -\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{par comparaison}$$

3. Pour entier naturel $n \geq 2$:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \iff -1 - 2n + n^2 \leq (-1)^n - 2n + n^2 \leq 1 - 2n + n^2$$

$$\iff \frac{1-2n+n^2}{3+n-2n^2} \leq u_n \leq \frac{-1-2n+n^2}{3+n-2n^2} \quad \text{car } 3+n-2n^2 < 0 \quad \forall n \geq 2$$

Soit $v_n = \frac{1-2n+n^2}{3+n-2n^2}$ et $w_n = \frac{-1-2n+n^2}{3+n-2n^2}$.

On a vu dans l'exercice 1, question 3, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{2}$

On a de la même manière : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \geq 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2} \quad \text{d'après le théorème des gendarmes}$$

4. Pour tout entier naturel $3^n - 1 > 0$, le signe de u_n est donc celui du numérateur.

Si n est pair : $2^n - (-3)^n = 2^n - 3^n < 0$

Si n est impair : $2^n - (-3)^n = 2^n + 3^n > 0$

De plus, on a vu dans l'exercice 1, question 4, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 3n}{3^n - 1} = -1$

On peut montrer de la même manière que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3n}{3^n - 1} = 1$

Si la suite avait une limite, elle serait unique que l'on considère les termes paires ou les termes impairs, on a donc une contradiction, ce qui nous permet de conclure que la suite n'a pas de limite.

Exercice 4 (10 points)

Cet exercice est constitué de quatre questions correspondant à des approches différentes pour étudier la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$$

1. a. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soit la propriété $P_n : u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

◦ Initialisation :

Avec $n = 0$: $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1$

Donc P_0 est vraie et la propriété est initialisée au rang $n = 0$.

◦ Hérédité :

On suppose P_k vraie, on a donc $u_k = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On essaie de montrer que P_{k+1} est vraie, c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 1 + \frac{1}{2}u_k \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \quad (\text{en utilisant l'hypothèse de récurrence}) \\ &= 1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie et la propriété est héréditaire

◦ Conclusion :

La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire donc, par le principe de récurrence, on a bien pour tout entier naturel n : $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\square$

b. Que peut-on en déduire sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 \text{ par produit et par somme}$$

2. a. Montrer que la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 2$ est géométrique.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2) \\ &= \frac{1}{2}a_n \end{aligned}$$

Donc a_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 = u_0 - 2 = -1$

b. En déduire une expression explicite de la suite (a_n) et de la suite (u_n) .

D'après 2.a. : $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n .

Et $u_n = a_n + 2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n .

c. Que peut-on en déduire sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

Même réponse que 1.b.

3. a. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

Soit la propriété $P_n : 1 \leq u_n \leq 2$

◦ Initialisation :

Avec $n = 0$: $u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $1 \leq 1 \leq 2$

Donc P_0 est vraie et la propriété est initialisée au rang $n = 0$.

◦ Hérédité :

On suppose P_k vraie, on a donc $1 \leq u_k \leq 2$ (HR).

On essaie de montrer que P_{k+1} est vraie, c'est à dire que : $1 \leq u_{k+1} \leq 2$.

$$\begin{aligned}
 &1 \leq u_k \leq 2 \quad (HR) \\
 \Rightarrow &\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}u_k \leq 1 \\
 \Rightarrow &1 \leq \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}u_k \leq 2 \\
 \Rightarrow &1 \leq u_{k+1} \leq 2
 \end{aligned}$$

Donc P_{k+1} est vraie et la propriété est héréditaire

◦ Conclusion :

La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et est héréditaire donc, par le principe de récurrence, on a bien pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq 2$ $\square$

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n$.

$$\begin{aligned}
 &1 \leq u_n \leq 2 \\
 \Rightarrow &-2 \leq -u_n \leq -1 \\
 \Rightarrow &-1 \leq -\frac{1}{2}u_n \leq -\frac{1}{2} \\
 \Rightarrow &0 \leq 1 - \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

c. Que peut-on en déduire sur la limite éventuelle de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente et sa limite est inférieure ou égale à 2.

4. a. Écrire un programme en Python qui calcule le 100^{ième} terme de la suite (u_n) (en utilisant sa définition par récurrence et non pas sa formulation explicite).

```

1  # avec une fonction
2  def terme(n):
3      u=1
4      for i in range(n-1):
5          u = 1 + 0.5*u
6      return u
7  print(terme(100))

```

```

1  # sans fonction
2  n = 100
3  u = 1
4  for i in range(n-1):
5      u = 1 + 0.5*u
6  print(u)

```

b. Que peut-on conjecturer sur la valeur de ce terme ?

La valeur de ce terme est inférieure ou égale à 2, la suite étant croissante et majorée.