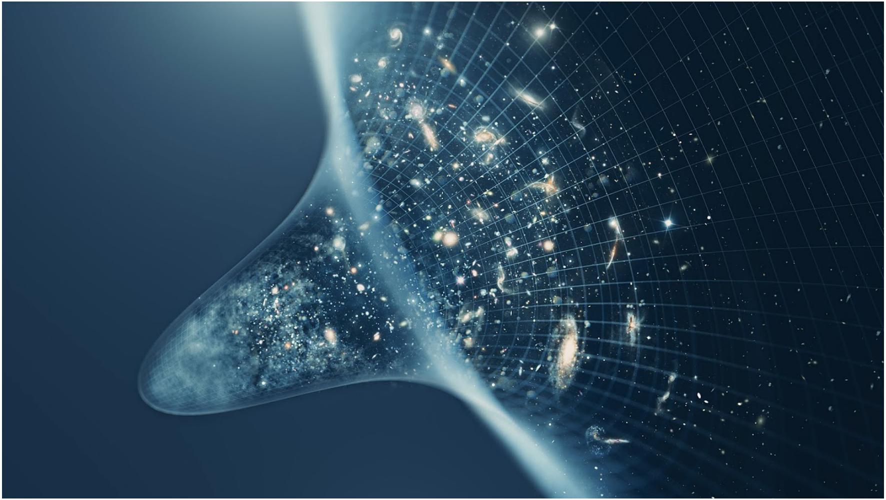
Limites de fonctions

MatheX

10 octobre 2023



Limites de fonctions

Table des matières :

Limites de fonctions

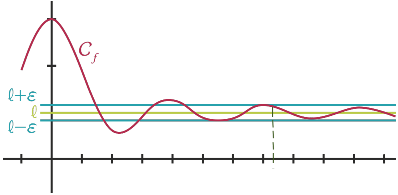
Table des matières :

Limites de fonctions

Définition 1 : (limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$)

Soit ℓ un nombre réel.

f a pour limite ℓ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) $\Longleftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (respectivement pour x assez petit)



NB :

- on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

(respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$)

- on essaiera de prouver que :

pour tout ε, il existe x_0 tel que : pour tout $x > x_0$, $f(x) \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$

avec ε un réel positif non nul et x_0 un réel (un x assez grand)

Limites de fonctions

Exemple : *Étudiez la limite de la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *en* $+\infty$

Intuitivement :

Sur un exemple :

Rigoureusement :

Limites de fonctions

Exemple : *Étudiez la limite de la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *en* $+\infty$

Intuitivement : on *voit* que la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ est $\ell = 0$

Sur un exemple : si on choisit $\varepsilon = 10^{-6}$, on peut trouver x_0 tel que pour tout $x > x_0$, on a $0 < f(x) < 10^{-6}$:

$$x > 0 \quad et \quad f(x) = \frac{1}{x} < 10^{-6} \iff x > 10^6$$

Donc en prenant $x_0 = 10^6$, on a bien : pour tout $x > x_0$, $0 < f(x) < 10^{-6}$

Rigoureusement : Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe x_0 tel que pour tout $x > x_0$ on a $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$:

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc avec $x_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$, on a bien :

pour tout $x > x_0$, $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$

et donc la fonction $f(x)$ est convergente en $+\infty$ et a pour limite $\ell = 0$

Limites de fonctions

Exemple 2 :

Étudiez la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *en* $-\infty$

$$x < 0 \ \ et \ \ \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow x < 0 \ \ et \ \ x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{car } \varepsilon > 0$$

Donc si on prend $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, on a bien :

pour tout $x < x_0$, on a $-\varepsilon < 0 < f(x) < \varepsilon$

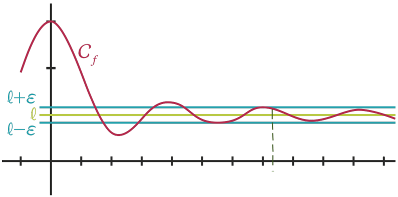
Et donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Limites de fonctions

Définition 2 : (asymptote horizontale)

Soit ℓ un nombre réel.

La droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$)



Limites de fonctions

Exemple : *Donner les asymptotes horizontales à C_f :*

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

Limites de fonctions

Exemple :

Donner les asymptotes horizontales à C_f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \implies d_1 \ : \ y = -1$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5 \implies d_2 \ : \ y = 5$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$

Limites de fonctions

Définition 3 : (limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$)

Soit A et B deux réels quelconques.

f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) $\Longleftrightarrow$ Tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (respectivement pour x assez petit)

f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) $\Longleftrightarrow$ Tout intervalle $]-\infty;B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand
(respectivement pour x assez petit)

NB :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A$, il existe x_0 tel que : $\forall x > x_0,\ f(x) > A$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall B$, il existe x_0 tel que : $\forall x < x_0,\ f(x) < B$

Limites de fonctions

Exemple : *Étudiez les limites de la fonction $f(x) = 2x$ en $+\infty$ et en $-\infty$*

$f(x) = 2x < B \iff x < \dfrac{B}{2}$

Donc si on prend $x_0 = \dfrac{B}{2}$, on a bien :

pour tout $x < x_0$, on a $f(x) < B$

Et donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = 2x > A \iff x > \dfrac{A}{2}$

Donc si on prend $x_0 = \dfrac{A}{2}$, on a bien :

pour tout $x > x_0$, on a $f(x) > A$

Et donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Limites de fonctions

Définition 4 : (limite infinie d'une fonction en a)

Soit A et B deux réels quelconques ; a un réel et r un réel positif
Soit f une fonction définie sur $[r-a;a[$ ou sur $]a;r+a[$

f a pour limite $+\infty$ en a $\Longleftrightarrow$ Tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a

f a pour limite $-\infty$ en a $\Longleftrightarrow$ Tout intervalle $]-\infty;B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a

NB :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty \iff \forall A, \text{ il existe } x_0 \text{ tel que : } \forall x \in]a;x_0[,\ f(x) > A$$

$$\lim f(x) = +\infty \iff \forall A, \text{ il existe } x_0 \text{ tel que : } \forall x \in]x_0;a[,\ f(x) > A$$

Limites de fonctions

Exemple : *Étudiez les limites de la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *en 0*

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \dfrac{1}{x} > A > 0$ et $x > 0 \iff 0 < x < \dfrac{1}{A}$

Donc si on prend $x_0 = \dfrac{1}{A}$, on a bien : pour tout $x \in]0; x_0[$, on a $f(x) > A$

Et donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

$f(x) = \dfrac{1}{x} < B < 0$ et $x < 0 \iff \dfrac{1}{B} < x < 0$

Donc si on prend $x_0 = \dfrac{1}{B}$, on a bien : pour tout $x \in]x_0; 0[$, on a $f(x) < B$

Et donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$

Limites de fonctions

Définition 5 : (asymptote verticale)

La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote** verticale à C_f $\iff$ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Limites de fonctions

Exemple : *Donner les asymptotes verticales à C_f :*

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5

Limites de fonctions

Exemple :

Donner les asymptotes verticales à C_f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty \implies d_1 : x = -3 \text{ est une asymptote verticale à } C_f$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty \implies d_2 : x = 2 \text{ est une asymptote verticale à } C_f$$

Limites de fonctions

Table des matières :

Propriété 1 : (limite d'une somme)

Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)+g(x)\big) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

NB : Une forme indéterminée ($F.I$) ne permet pas de conclure directement.

Limites de fonctions

Propriété 2 : (limite d'un produit)

Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \times g(x)\big) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$

Limites de fonctions

Propriété 3 : (limite d'un quotient)

Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
Et $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
Alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ (selon règle des signes)	$\pm\infty$ (selon règle des signes)	$F.I$	$F.I$

Limites de fonctions

Exemple :

Définition 6 : (fonction composée)

Soit h une fonction définie sur I et J l'image de I par h.
Soit g une fonction définie sur J et K l'image de J par g.

La fonction composée de h suivie de g est la fonction qui associe à x l'image par g de l'image par h de x :

$$g \circ h \ : \ \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & h(x) & \longmapsto & g\left(h(x)\right) \end{array}$$

NB : On dit "la fonction g rond h"

Limites de fonctions

Exemple : *Soit les fonctions* $g(x) = e^x$ *et* $h(x) = 1 - 2x$

a. Écrire la fonction $f = g \circ h$

b. Écrire la fonction $i = h \circ g$

Limites de fonctions

Exemple : *Soit les fonctions* $g(x) = e^x$ *et* $h(x) = 1 - 2x$

a. Écrire la fonction $f = g \circ h$

$f(x) = g \circ h\,(x) = e^{1-2x}$

b. Écrire la fonction $i = h \circ g$

$i(x) = h \circ g\,(x) = 1 - 2\,e^x$

Limites de fonctions

Propriété 4 : (limite d'une fonction composée)

Soit a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \\ \lim\limits_{X \to b} f(X) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f \circ g\,(x) = c$$

Limites de fonctions

Exemple :

Soit les fonctions $g(x) = e^x$ *et* $h(x) = 1 - 2x$
Déterminer la limite en $+\infty$ *de la fonction :*

a. $f = g \circ h$:

b. $i = h \circ g$:

Limites de fonctions

Exemple :

Soit les fonctions $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 - 2x$
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction :

a. $f = g \circ h$: $f(x) = g \circ h\,(x) = e^{1-2x}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{1-2x} = 0 \qquad \text{par composition}$$

b. $i = h \circ g$: $i(x) = h \circ g\,(x) = 1 - 2\,e^x$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} (1 - 2X) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (1 - 2e^x) = -\infty \qquad \text{par composition}$$

Limites de fonctions

Exemple 2 :

Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ *:*

On a déjà démontré que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Soit $X = -x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0 \text{ par quotient}$$

Or $\dfrac{1}{e^{-x}} = e^x$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Limites de fonctions

Table des matières :

Limites de fonctions

Théorème 1 : (Comparaison à une fonction de limite infinie)

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$
Soit deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \geq g(x) \text{ sur } I \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \leq g(x) \text{ sur } I \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Limites de fonctions

Exemple : *Déterminer les limites de* $f(x) = x + cos\,x$:

Limites de fonctions

Exemple : *Déterminer les limites de* $f(x) = x + cos\, x$:

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq cos\, x \leq 1 \;\Rightarrow\; x - 1 \leq x + cos\, x \leq x + 1 \;\Rightarrow\; x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} -1 = -1 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \quad \text{par somme}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{par comparaison}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} 1 = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \quad \text{par somme}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{par comparaison}$$

Limites de fonctions

Exemple 2 :

Déterminer la limite de e^x en $+\infty$

Soit $g(x) = e^x - x$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

$g'(x) = e^x - 1 \geq e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ car e^x croissante sur $\mathbb{R}$

$g'(x) \geq 0 \implies g$ croissante $\implies g(x) \geq 0 \implies e^x \geq x$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{r} e^x \geq x \quad \forall x \geq 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{par comparaison}$$

Limites de fonctions

Théorème 2 : (théorème des gendarmes)

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Soit trois fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.
Soit ℓ un réel.

$$\left.\begin{array}{r} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ sur } I \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

Limites de fonctions

Exemple : *Déterminer les limites de* $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$:

Limites de fonctions

Exemple : *Déterminer les limites de* $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{\cos x}{x} \geq \dfrac{1}{x} \quad \text{pour } x < 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

Limites de fonctions

Propriété 5 : (croissances comparées)

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x}\, e^x = 0$$

Limites de fonctions

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x - e^x)$:

Limites de fonctions

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x - e^x)$:

On lève l'indétermination par factorisation :

$$x - e^x = x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \longrightarrow -\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x - e^x) = -\infty \quad \text{par produit}$$

Limites de fonctions

Démonstration :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

On étudie la fonction $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = e^x - x \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x - 1$

$f''(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0 \quad (1)$

$f''(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0 \quad (2)$

$f''(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0 \quad (3)$

(1), (2) et (3) $\Rightarrow$ f' atteint un minimum en 0 $\Rightarrow$ $\forall x,\ f'(x) \geq f'(0) = 1 > 0$
$\Rightarrow$ f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Aussi, $\forall x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f(x) > f(0) = 1 > 0 \Rightarrow e^x > \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\square$

Limites de fonctions

Démonstration 2 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Si $x \neq 0$, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{n \cdot \frac{x}{n}}}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{e^X}{X}\right)^n \qquad \text{avec } X = \frac{x}{n}$$

Puis par composition et par produit :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \square$$

Limites de fonctions

Démonstration 3 :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Avec $X = -x$, on a :

$$x^n e^x = (-X)^n e^{-X} = (-1)^n \cdot \frac{X^n}{e^X}$$

Par composition, par quotient et par produit , on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^n}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{(-x)^n}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \square$$

Limites de fonctions

Table des matières :

Limites de fonctions

Propriété 6 : (dérivée d'une fonction composée)

Soit h une fonction dérivables sur I et J l'image de I par h.
Soit g une fonction dérivable sur J.
Soit f la fonction composée $f = g \circ h$

Alors f est dérivable sur I et :

$$\boxed{f' = (g \circ h)' = h' \times (g' \circ h)}$$

Limites de fonctions

Exemple :

Calculez la dérivée des fonctions :

a. $f(x) = (2x+3)^{10}$

b. $f(x) = \sqrt{2x+6}$

Limites de fonctions

Exemple :

Calculez la dérivée des fonctions :

a. $f(x) = (2x+3)^{10}$

$h(x) = 2x+3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = 2$
$g(x) = x^{10}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = 10\,x^9$

$\Rightarrow$ f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 \times 10 \times (2x+3)^9 = 20\,(2x+3)^9$

b. $f(x) = \sqrt{2x+6}$

$h(x) = 2x+6$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = 2$
$g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow$ f définie sur $[-3\,;+\infty\,[$ et dérivable sur $]-3\,;+\infty\,[$ et :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$