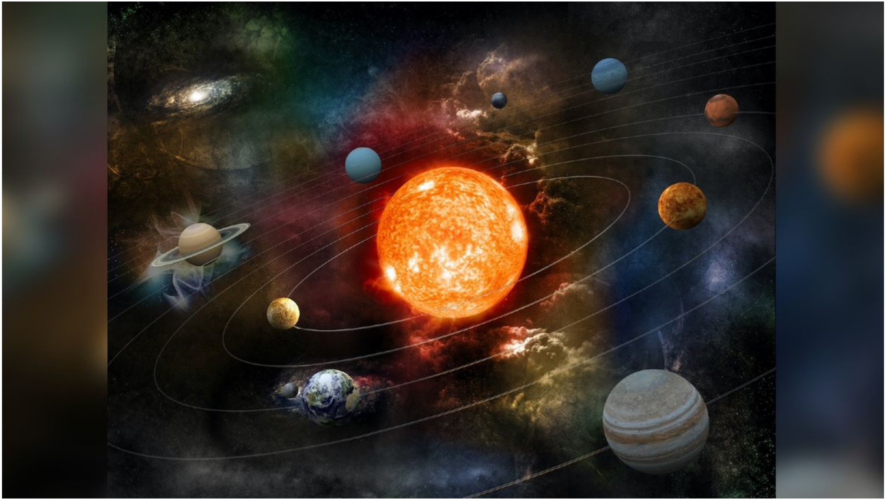
Logarithme népérien

MatheX

7 mars 2024



Logarithme népérien

Table des matières :

1. Fonction ln
2. Propriétés algébriques
3. Etude la fonction ln

Logarithme népérien

Table des matières :

1 Fonction ln

- Rappel sur la fonction exponentielle (1ère)
- Définition de la fonction ln
- Équation et inéquation avec ln

Logarithme népérien

Rappel 1 : (fonction exponentielle)

Définition : la fonction exponentielle est l'unique fonction égale à sa dérivée dont l'image de 0 est 1 : $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ e^0 = 1 \end{cases}$

Étude : la fonction exponentielle est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Relation fonctionnelle : $e^{x+y} = e^x \times e^y$

Autres propriétés : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$; $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

Croissances comparées : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

Logarithme népérien

Définition 1 : (fonction ln)

La fonction **logarithme népérien** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle :

$$\begin{array}{rrcl} \ln : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) = y \quad \text{avec } y \text{ l'unique réel tel que } e^y = x \end{array}$$

Ainsi pour tout réel x strictement positif et pour tout réel y, on a :

$$\boxed{\ln x = y \iff x = e^y}$$

$$\boxed{\ln\left(e^y\right) = y}$$

$$\boxed{e^{\ln x} = x}$$

Logarithme népérien

Exemple :

a. Donner un tableau de valeurs de la fonction exponentielle.

b. En déduire un tableau de valeurs de la fonction ln.

Logarithme népérien

Exemple :

a. Donner un tableau de valeurs de la fonction exponentielle.

x	-2	-1	0	1	2	3
e^x	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3

b. En déduire un tableau de valeurs de la fonction ln.

x	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3
$\ln x$	-2	-1	0	1	2	3

Logarithme népérien

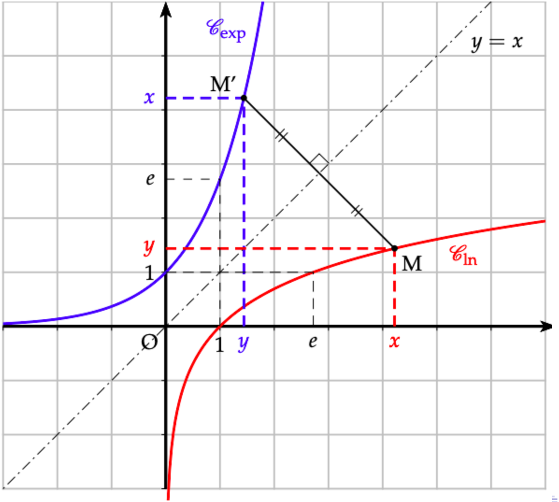
Exemple :

c. Tracer les courbes représentatives des fonctions exponentielle et ln.

Logarithme népérien

Exemple :

c. Tracer les courbes représentatives des fonctions exponentielle et ln.



Logarithme népérien

Propriété 1 : (équation et inéquation avec ln)

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$$\boxed{\ln a = \ln b \iff a = b}$$

$$\boxed{\ln a < \ln b \iff a < b}$$

Démonstration :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$\ln a < \ln b \Leftrightarrow e^{\ln a} < e^{\ln b} \Leftrightarrow a < b$ $\square$

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow e^{\ln a} = e^{\ln b} \Leftrightarrow a = b$ $\square$

Logarithme népérien

Exemple : Résoudre les équation et inéquations ci-après.

a. $\ln(2x+1) = 0$

b. $e^{2x+1} = 2$

c. $\ln(2x+1) = \ln x$

d. $\ln(2x+1) \leq 0$

Logarithme népérien

Exemple : Résoudre les équation et inéquations ci-après.

a. $\ln(2x+1)=0$ $\quad$ $\ln(2x+1)$ existe si $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2} \quad (1)$

$\ln(2x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(2x+1)=\ln(1) \Leftrightarrow 2x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \quad (2)$

$(1)\ et\ (2) \Rightarrow S=\{0\}$

b. $e^{2x+1}=2 \quad \Leftrightarrow \ln(e^{2x+1})=\ln(2) \Leftrightarrow 2x+1=\ln(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 2-1}{2}$

c. $\ln(2x+1)=\ln x$ $\quad$ Existence : $2x+1>0\ et\ x>0 \Leftrightarrow x>0 \quad (1)$

$\ln(2x+1)=\ln x \Leftrightarrow 2x+1=x \Leftrightarrow x=-1 \quad (2)$

$(1)\ et\ (2) \Rightarrow S=\emptyset$

d. $\ln(2x+1)\leq 0$ $\quad$ $\ln(2x+1)$ existe si $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2} \quad (1)$

$\ln(2x+1)\leq 0 \Leftrightarrow \ln(2x+1)\leq\ln(1) \Leftrightarrow 2x+1\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 0 \quad (2)$

$(1)\ et\ (2) \Rightarrow S=\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right]$

Logarithme népérien

Table des matières :

2 Propriétés algébriques

- Relation fonctionnelle
- Conséquences de la relation fonctionnelle

Logarithme népérien

Propriété 2 : (relation fonctionnelle)

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$$

NB :

La fonction exponentielle transforme une somme en produit.
Sa fonction réciproque transforme donc un produit en une somme.

Démonstration :

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b = e^{\ln(a \times b)} \implies \ln a + \ln b = \ln(a \times b) \qquad \square$$

Logarithme népérien

Exemple :

a. Montrer que : $\ln 360 = 3\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 5$

b. Calculer $\ln 1024$ en fonction de $\ln 2$.

Logarithme népérien

Exemple :

a. Montrer que : $\ln 360 = 3\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 5$

$$\begin{aligned}
\ln 360 &= \ln(8 \times 9 \times 5) \\
&= \ln 8 + \ln 9 + \ln 5 \\
&= \ln(4 \times 2) + \ln(3 \times 3) + \ln 5 \\
&= \ln 4 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 3 + \ln 5 \\
&= \ln(2 \times 2) + \ln 2 + \ln 3 + \ln 3 + \ln 5 \\
&= \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 3 + \ln 5 \\
&= 3\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 5
\end{aligned}$$

b. Calculer $\ln 1024$ en fonction de $\ln 2$.

$$\ln 1024 = \ln 2^{10} = 10\ln 2$$

Logarithme népérien

Propriété 3 : (conséquences de la relation fonctionnelle)

Soit a et b deux réels strictement positifs. Soit n un entier relatif.

$$\boxed{\ln\left(a^n\right) = n \ln a}$$

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \ln a}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b}$$

Logarithme népérien

Exemple :

a. Trouver le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^6$.

b. Résoudre l'équation $\ln(x^2 - 1) - 2\ln\left(\sqrt{x+1}\right) = 1$.

Logarithme népérien

Exemple :

a. Trouver le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^6$.

$$2^n > 10^6 \iff \ln(2^n) > \ln\left(10^6\right) \iff n\ln 2 > 6\ln 10$$
$$\iff n > 6 \times \frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 19,9 \Rightarrow n = 20$$

b. Résoudre l'équation $\ln(x^2-1) - 2\ln\left(\sqrt{x+1}\right) = 1$.

Condition d'existence : $(x < -1$ ou $x > 1)$ et $(x > -1)$ donc $x > 1 \quad (1)$.

$$\ln(x^2-1) - 2\ln\left(\sqrt{x+1}\right) = 1 \iff \ln(x^2-1) - \ln(x+1) = \ln e^1$$
$$\ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = \ln e \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = e \iff x-1 = e \iff x = e+1 \quad (2)$$
$$(1) \text{ et } (2) \Longrightarrow S = \{e+1\}$$

Logarithme népérien

Table des matières :

3 Etude la fonction ln

- Dérivée de ln
- Limites de ln x
- Tableau de variations
- Croissances comparées

Logarithme népérien

Propriété 4 : (dérivée de ln)

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ de dérivée :

$$\boxed{\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}}$$

En utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on a :

$$\boxed{\Big(\ln u(x)\Big)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Logarithme népérien

Exemple :

a. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(2x+1)$.

b. Calculer la dérivée de $g(x) = \ln(x^2+1)$.

c. Calculer la dérivée de $h(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

Logarithme népérien

Exemple :

a. Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(2x+1)$.

f définie et dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$. $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

b. Calculer la dérivée de $g(x) = \ln(x^2+1)$.

g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

c. Calculer la dérivée de $h(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \dfrac{1}{2}g(x)$

$h'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Logarithme népérien

Démonstration :

on admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on cherche sa dérivée.

$$\begin{aligned} e^{\ln x} = x \ \Rightarrow\ & \left(e^{\ln x}\right)' = (x)' \\ \Rightarrow\ & (\ln x)' \times e^{\ln x} = 1 \\ \Rightarrow\ & (\ln x)' \times x = 1 \\ \Rightarrow\ & (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \square \end{aligned}$$

Logarithme népérien

Propriété 5 : (limites de ln x)

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

Logarithme népérien

Démonstration :

Pour la limite en $+\infty$, on revient à la définition de la limite :

Puisque, pour tout $x > 0$: $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$.
On retrouve bien la définition d'une limite infinie en $+\infty$:
$\forall A$, il existe $x_0 = e^A$ tel que : $\forall x > x_0,\ \ln x > A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\square$

Pour la limite en 0, on utilise un changement de variable :

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \ln x = -\ln X \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty \qquad \square$$

Logarithme népérien

Propriété 6 : (tableau de variations)

x	0	e^{-1}	1	e	$+\infty$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\|$		$+$		
$\ln x$	$\|$ $-\infty$	-1	0	1	$+\infty$

Logarithme népérien

Exemple :

Dresser le tableau de variation de $f(x) = \ln(2x+1) - 1$

Logarithme népérien

Exemple :

Dresser le tableau de variation de $f(x) = \ln(2x+1) - 1$

f définie et dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{e-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$		$+$		
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Logarithme népérien

Propriété 7 : (croissances comparées)

Soit n un entier naturel non nul.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$$

NB :
on retient que x l'emporte sur $\ln x$ (et que e^x l'emporte sur x^n).

Logarithme népérien

Exemple :

Déterminer la limite en $+\infty$ de $\ln x - x$.

Logarithme népérien

Exemple :

Déterminer la limite en $+\infty$ de $\ln x - x$.

$$\ln x - x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$ par croissance comparée de ln puis par somme.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x) = -\infty \text{ par produit}$$

Logarithme népérien

Démonstration :

Soit $x^n = e^X$. On a $X = \ln(x^n) = n \ln x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} n \ln x = +\infty$.

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\frac{X}{n}}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée de la fonction exponentielle puis quotient $\square$

Soit $X = \dfrac{1}{x}$. On a $x = \dfrac{1}{X}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{\ln X}{X^n} = -0 = 0$ par croissance comparée de ln en $+\infty$ et produit $\square$