Orthogonalité dans l'espace

MatheX

26 décembre 2023

Orthogonalité dans l'espace

Table des matières :

Orthogonalité dans l’espace

Table des matières :

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 1 : (Extension du produit scalaire à l'espace)

Le produit scalaire dans le plan s'étend à l'espace.

Avec le projeté : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; H le projeté orthogonal de C sur (AB)

Avec l'angle : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos\left(\vec{u}; \vec{v}\right)$

Avec les normes :
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

Avec les coordonnées : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

avec $\vec{u} = (x; y; z)$ et $\vec{v} = (x'; y'; z')$ dans une base orthonormée de l'espace

NB : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Orthogonalité dans l'espace

Démonstration :

Projeté, angle et normes :

Il suffit de travailler dans le plan défini par un point A et les représentants d'origine A des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les démonstrations vues en 1ère pour le produit scalaire dans le plan s'appliquent alors.

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 2 : (Symétrie et bilinéarité)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (1)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (2)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (3)$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (4)$$

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 3 : (expression analytique)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé (Les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux et leur norme vaut 1).
Soit les vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$.
Soit les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Orthogonalité dans l'espace

Démonstration :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$$
$$= xx'\vec{i}\cdot\vec{i} + \cancel{xy'\vec{i}\cdot\vec{j}} + \cancel{xz'\vec{i}\cdot\vec{k}} + \cancel{yx'\vec{j}\cdot\vec{i}} + yy'\vec{j}\cdot\vec{j} + \cancel{yz'\vec{j}\cdot\vec{k}} + \cancel{zx'\vec{k}\cdot\vec{i}} + \cancel{zy'\vec{k}\cdot\vec{j}} + zz'\vec{k}\cdot\vec{k}$$
$$= xx' + yy' + zz' \qquad \square$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \implies \left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \square$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \implies \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad \square$$

Orthogonalité dans l'espace

Table des matières :

Orthogonalité dans l'espace

Définition 1 : (orthogonalité de vecteurs)

Soit les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, ainsi qu' un point A de l'espace.
Soit les droite d_1 et d_2 passant par A et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

$$\vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \text{ orthogonaux} \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 \text{ et } d_2 \text{ perpendiculaires}$$

NB :

- $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
- le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Orthogonalité dans l'espace

Définition 2 : (orthogonalité de droites)

Soit les droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

$$d_1 \text{ et } d_2 \text{ orthogonales} \iff \vec{u_1} \text{ et } \vec{u_2} \text{ orthogonaux}$$

$$d_1 \text{ et } d_2 \text{ perpendiculaires} \iff d_1 \text{ et } d_2 \text{ orthogonales et coplanaires}$$

Orthogonalité dans l'espace

Exemple :

Orthogonalité dans l'espace

Définition 3 : (orthogonalité d'une droite et d'un plan)

Soit une droites d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathcal{P}$.
Soit $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.
Soit d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

$d \perp \mathcal{P} \iff \vec{u}$ orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathcal{P}$

NB : deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan, ou deux droites sécantes du plan, sont suffisants, on a donc :

$$d \perp \mathcal{P} \iff \vec{u} \perp \vec{u_1} \quad \text{et} \quad \vec{u} \perp \vec{u_2}$$

$$d \perp \mathcal{P} \iff d \perp d_1 \quad \text{et} \quad d \perp d_2$$

Orthogonalité dans l'espace

Exemple :

Orthogonalité dans l'espace

Définition 4 : (orthogonalité de plans)

Soit les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

$$\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \iff \text{il existe une droite de } \mathcal{P} \text{ orthogonale à } \mathcal{Q}$$

Orthogonalité dans l'espace

Définition 5 : (plan médiateur)

Le plan médiateur au segment $[AB]$ est la plan orthogonal à (AB) et passant par le milieu I de $[AB]$

NB : Les points du plan médiateurs de $[AB]$ sont à égales distance de A et de B.

Orthogonalité dans l'espace

Table des matières :

Orthogonalité dans l'espace

Définition 6 : (vecteur normal à un plan)

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul.
Soit un plan $\mathcal{P}$ et une droite d orthogonale à $\mathcal{P}$.

$$\vec{n} \text{ vecteur normal à } \mathcal{P} \iff \vec{n} \text{ colinéaire à un vecteur directeur de } d$$

NB :

- un vecteur normal suffit à caractériser la direction d'un plan
- $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ $\iff$ $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 4 : (vecteur normal et positions relatives)

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ et $\vec{n'}$ normal à $\mathcal{P}'$.
Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

$$d \perp \mathcal{P} \iff \vec{n} \text{ colinéaire à } \vec{u}$$

$$d \,//\, \mathcal{P} \iff \vec{n} \perp \vec{u}$$

$$d \text{ et } \mathcal{P} \text{ sécants} \iff \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ non orthogonaux}$$

$$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \iff \vec{n} \perp \vec{n'}$$

$$\mathcal{P} \,//\, \mathcal{P}' \iff \vec{n} \text{ et } \vec{n'} \text{ colinéaires}$$

Orthogonalité dans l'espace

Exemple :

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 5 : (vecteur normal et positions relatives)

Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0}$$

Démonstration :

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$ alors pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{n} = \alpha\,\vec{u} \cdot \vec{n} + \beta\,\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 + 0 = 0 \qquad \square$$

Orthogonalité dans l'espace

Exemple :

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 6 : (équation cartésienne d'un plan)

Soit un plan $\mathcal{P}$ et trois réels a, b et c non tous nuls.

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ $\iff$ $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$\boxed{\mathcal{P} \ : \quad ax + by + cz + d = 0}$$

Orthogonalité dans l'espace

Exemple :

Orthogonalité dans l'espace

Démonstration :

$\Longrightarrow$:

$$\left.\begin{array}{r}\vec{n}(a;b;c) \text{ normal à } \mathcal{P} \\ A(x_A;y_A;z_A) \text{ un point de } \mathcal{P} \\ M(x;y;z) \text{ un point quelconque de } \mathcal{P}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \Rightarrow ax+by+cz+d=0 \qquad \square$$

$$\text{avec } d=-(ax_A+by_A+cz_A)$$

$\Longleftarrow$:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{P}:\ ax+by+cz+d=0 \\ a,b \text{ et } c \text{ non tous nuls} \\ \text{par exemple } a \text{ non nul}\end{array}\right\} \Longrightarrow A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)\in\mathcal{P} \Rightarrow d=-ax_A$$

$$\Rightarrow ax+by+cz-ax_A=0 \Rightarrow a(x-x_A)+by+cz=0 \Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \qquad \square$$

Orthogonalité dans l'espace

Définition 7 : (projeté orthogonal)

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point d'intersection H entre la droite d et la droite perpendiculaire à d passant par A (ou lui même si $A \in d$).

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H entre la plan $\mathcal{P}$ et la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A (ou lui même si $A \in \mathcal{P}$).

Orthogonalité dans l'espace

Propriété 7 : (distance et projeté)

La distance entre un point A et son projeté orthogonal H sur une droite d est la plus courte distance entre A et un point de d.

La distance entre un point A et son projeté orthogonal H sur un plan $\mathcal{P}$ est la plus courte distance entre A et un point du plan $\mathcal{P}$.

Démonstration :

Pour tout point M de d ou de $\mathcal{P}$, on a d'après le théorème de Pythagore : $AM^2 = AH^2 + HM^2 \geq AH^2$ $\square$

Orthogonalité dans l'espace

Exemple :